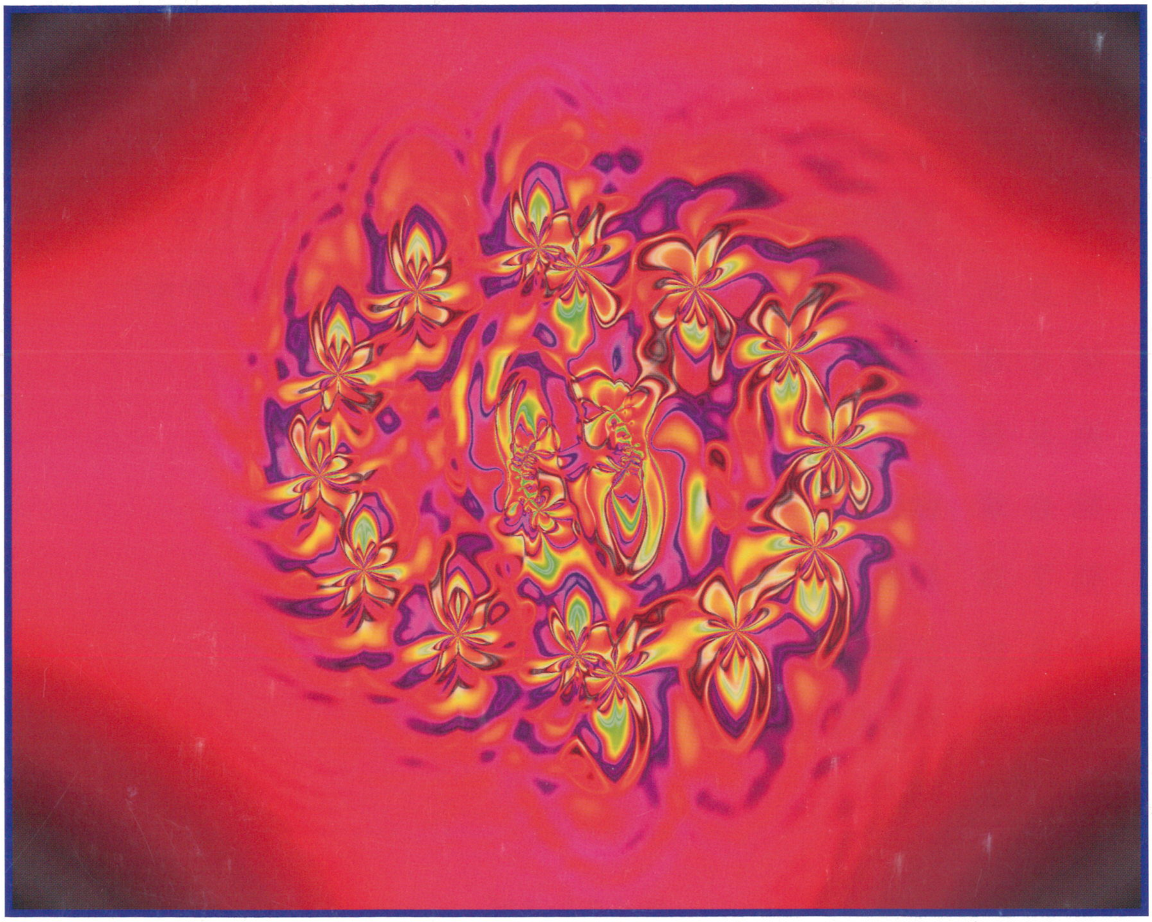
昭和38年７月２日第３種郵便物認可
2010年１月１日発行　第48巻１号　毎月１回１日発行
ISSN 0386―2240

# 数理科学

1
2010

## 特集 無限次元の魅力
### 諸分野を照らす多彩な舞台装置





No.559

サイエンス社

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-70：for Senior & Graduate Courses）

# 重点解説
# 基礎微分幾何

## 曲面，多様体，テンソル，微分形式，リーマン幾何

塩谷　隆　著

本体 1886 円　　送料 290 円　　表示価格は税抜きです

学部 2，3 年生から大学院レベルの微分幾何の基礎を，特に重要と思われる事柄に絞って解説．微分積分と線形代数の知識があれば読めるよう配慮することで，数学科のみならず広く理工系一般の初学者にとっても受け入れやすい記述となっている．

**第 1 章　曲面**
平面曲線／正則曲面／第 1 基本量／第 2 基本量／主曲率，平均曲率，ガウス曲率／第 1 変分公式と測地線／平行移動と共変微分／面積／曲面の一般化と大域的理論

**第 2 章　微分可能多様体**
$\mathbb{R}^n$ の位相／座標をもつ空間／微分可能多様体の定義／接空間と曲線の速度ベクトル／ベクトル場とリー括弧積／写像の微分／部分多様体／微分同相変換と商多様体／接束／ハウスドルフ性／多様体の位相／コンパクト性／多様体の位相と微分構造についてのお話

**第 3 章　テンソル場と微分形式**
双対ベクトル空間／1 次微分形式と線積分／テンソルとテンソル場／交代形式の基礎と図形的な意味／1 次形式の外積／交代形式の外積／微分形式とその積分／外微分／ストークスの定理

**第 4 章　リーマン多様体**
リーマン計量／曲線の長さとリーマン距離／レビ・チビタ接続／曲線に沿う共変微分と平行移動／写像に沿う共変微分／第 1 変分公式と測地線／曲率テンソル／断面曲率とリッチ曲率／指数写像／完備性／ヤコビ場／第 2 変分公式とボンネ・マイヤースの定理／ヘッシアン，ラプラシアン，発散定理

**第 5 章　補足**
集合と写像／ユークリッド空間／ベクトル空間／多変数の微分積分／常微分方程式

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 559 January 2010

# 無限次元の魅力

## 諸分野を照らす多彩な舞台装置



本号に掲載された広告主
牧野書店／53



表紙：戸川　隼人

## お得な定期購読をおすすめします

### 毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

**予約購読は１年間（本誌のみ）11,000円，１年間（本誌＋別冊２冊）14,500円，半年間（本誌のみ）5,500円，半年間（本誌＋別冊１冊）7,250円です．**（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

**お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．**

### 数理科学特集一覧

63年/7〜2007年/5 省略
2007年/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊 素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊 多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求

#### 数理科学臨時別冊一覧

08年/3 熱方程式で学ぶ逆問題
08年/5 重力理論講義
08年/6 代数幾何入門講義
08年/7 ネットワーク科学への招待
08年/9 物理のためのリー群とリー代数
08年/11 量子暗号理論の展開
09年/1 量子力学の考え方
09年/7 ゲージ理論の発展
09年/9 量子コンピュータの基礎［第２版］
09年/11 重点解説 基礎微分幾何
09年/12 $\varepsilon$–$\delta$ 論法再入門

### 「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

January 2010 MATHEMATICAL SCIENCES Number 559

特集／無限次元の魅力

# はじめに

## 無限次元とは何か

河東 泰之

初対面の人に職業は数学者だと言うと，何を研究しているのかと聞かれることがある．答えは，相手がどのくらい数学になじみがあるかによるのだが，理科系の人相手の場合は，無限次元行列の理論だと答えることがよくある．理科系で行列を知っている人でも，こう言うと何かとてつもないことのように反応する人は少なくない．「4 次元でも何か常識を超えた話なのに，無限次元なんて」というわけである．しかし数学的には無限次元を考えること自体は何ら大したことはなく，必然的なものである．

$n$ 次元ベクトル空間の一番簡単な例は，数を $n$ 個並べたベクトルたちを考えたものである．そう思うと，$n=3$ でも $n=1,000,000$ でも理論的には大した違いはない．様々な実験，観測データを並べてベクトルだと思うと統計的取扱いに便利だということはよくあり，そう思えばデータの数が 2 個や 3 個しかないことのほうがむしろまれである．データは通常有限個であるが，無限個の数を並べて考えることにするのも，とりあえずはそれほど大きな発想の飛躍ではない．

数学的な立場からみたとき，無限次元のベクトル空間が出てくる自然な状況は関数を考えるときである．$n$ 個の点からなる集合の上の任意の関数を考えよう．このような関数は，$n$ 個の値を並べて考えれば，$n$ 次元のベクトルを考えているのと同じことであり，関数の足し算，定数倍は，ベクトルの足し算，定数倍に対応している．普通，関数を考えるときは，有限集合ではなく，実数全体や区間のような無限集合を考えるので，その上の関数たちは，無限個の数が並んだもの，すなわち無限次元ベクトルにあたるというわけである（関数を考えるときは普通，連続性とか，積分についてよい性質を持つとかいった条件を考えるのだが，それは今は大した問題ではない）．関数というものはかなり昔から考えられてきたが，このように「関数＝無限次元ベクトル」という考え方が出てきたのは比較的新しく，20 世紀前半のことである．微分方程式（あるいはそれを書き換えた積分方程式）を考える際に，一つ一つの関数ではなく，関数全体の集合を考えることの有効性が，その頃初めて明らかになってきたからである．高校で最初に習うときは，ベクトルと関数は全く別のもののようだが，両者には共通の性質がたくさんあるのである．このようにして，線形代数の無限次元版の理論が登場した．関数解析学と呼ばれ，現在でも様々な方向に発展している．

無限次元の研究が盛んになったもう一つの理由は，物理学，特に量子力学の研究である．量子力学が 20 世紀前半に成立し，その数学的理解が当初から大きな問題になった．そこで，物理的な「状態」を数学的に考えるには，無限次元のヒルベル

ト空間を考える必要があることがわかったのである．フォン・ノイマンらの活躍により，このことも関数解析学の初期の発展に大きな役割を果たしている．近年数学と理論物理学の関係がまた深まっており，これまであまり物理学との関係が深いとは思われていなかった代数的な分野も最近の進展では大きな注目を集めている．ここでも無限次元はあらゆるところに現れる基本的なキーワードになっており，本特集でも数理物理学に関係した話題は多く取り上げられている．

通常，線形代数を最初に習うときは，微分積分学などの極限操作はあまり出てこない．ベクトルや行列を成分とする無限級数が後のほうで出てくることがあるくらいである．有限次元ベクトル空間に入る自然な位相は1種類だし，有限次元ベクトル空間の間の線形写像はこの位相について自動的に連続になるし，極限と言ってもあまり大したことは起こらないからである．これに対し，関数解析学では，極限操作が基本的な重要性を持ち，しかも様々な困難が発生する．例えば自然な位相が何通りもあったり，線形写像の連続性や，それを弱めた条件などのチェックがずっと難しくなったりするのである．関数解析学の難しい点も，重要な点もすべてこの種の極限操作に関係していると言ってもよいくらいである．

それでは無限次元と有限次元の違いはどこから発生するのであろうか．単に，何もかも違う，と言っても言い過ぎではないかもしれないが，もっと具体的に限定してみよう．私の研究している作用素環論は，直接無限次元のベクトル空間の上の線形写像たちを取り扱う．そこに出てくる様々な議論，性質を見ると大きな違いは主に次の2つから発生していることがわかる．

一つ目は，無限集合はその真部分集合と同じサイズだ，ということである．これを無限の定義とすることもよくある重要な性質である．例えば，1番を2番に動かし，2番を3番に動かし，3番を4番に，… という操作を繰り返したとき，無限個番号があれば，ずらした先では1番だけが余ってしまう．あるいは，1番を2番に動かし，2番を4番に動かし，3番を6番に，… としていけば，無限個余らせることも可能である．このことに関連して，どんどん番号をずらしていくと，いくらでも「遠く」に持っていけるということもある．これらの性質が，無限次元ベクトル空間の線形写像の興味深い性質を導き，多くの重要で新しい側面をもたらすのである．

もう一つの重要なポイントは，無限個の数は普通は足せないということである．もちろん和が収束する級数もいくらでもあるが，勝手な数列を取ったとき，その和というものは一般には定義できない．自然な理論を有限次元のときと同様に考えようとすると，何らかの意味で和がとれるようなものに話を限定する必要があり，通常の関数解析学ではそうすることが多い．これは，話を特殊なものに限定しているようだが，この限定のためにかえって，無限次元でのみ興味深い現象が起こったりするのである．

さてこのように，基本的な重要性を持つ無限次元だが，無限次元ベクトル空間そのものを研究している人はあまり多くない．基本的なことはよくわかっているし，一方ではいくらでも複雑でよくわからないことがたくさんあって，何を研究したらいいのかわからないからでもある．有限次元の話でも，有限次元ベクトル空間自体を研究している人はあまりいないが，有限次元の曲がった空間，すなわち多様体については，興味深い問題の数も研究している人の数も莫大である．また例えば，群の表現についても有限次元でも様々な重要なテーマがある．そこで無限次元でも，単にベクトル空間を考えるのではなく，有限次元で考えられていた様々な数学的構造を無限次元で考えると，いろいろと重要な研究テーマが生じてくる．このような立場から，本特集では多くの話題が取り上げられている．様々な立場の方に興味を持っていただければ幸いである．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）

# 無限次元系と繰り込み群

渡辺 浩

無限次元系と有限次元系はどのような点で異なるのか，有限次元系には見られない無限次元系の特異な振舞いを捉えるにはどうしたらいいのか．直観的に理解しやすい無限次元系の例であるスピン系に即して，このような問題をなるべく分かりやすく解説したい．

## ■ 1. 自然法則と非対称性 ■

自然法則は本来対称的でなければならないと考えられている．ニュートンの力学は，地上のりんごの運動と天上の月の運動を一つの理論で説明するものである．りんごの運動では，鉛直方向と水平方向の性質に違いが見られ，月の運動では，地球が宇宙の中心にあるかのようだが，ニュートンの理論においてはこれらの偏りが解消され，宇宙は回転と平行移動について不変な容れ物として，完全な**対称性（不変性）**が与えられている．「鉛直方向は特殊なのだ」「地球は宇宙の中心である」という類の先見的な非対称性（偏り）を根底に据える理論は，物理の基本法則として不完全であり，自然法則は本来対称的でなければならないと考える．そして，現象として現れた非対称性に何らかの原因を求めることになる．実際，りんごや月の運動に見られる非対称性は，地球との間に働く重力にその原因が帰せられる．

それでは，「非対称性には必ず原因がある」のだろうか．生体内で合成されるアミノ酸は，いわゆる $L$ 型のみであるが，有機化学的には，いくつか異性体が存在する．特に，$L$ 型アミノ酸は，それと鏡像関係にある $D$ 型アミノ酸と生体内で鋭敏に区別され，$L$ 型のみが合成・代謝のプロセスに参加する．両者の間に化学的な優劣はないから，根源的にはどちらを是としてもよいはずであるが，現存する生物では，$L$ 型だけが利用されるという偏りが生じている．

水平な液体の層を下から一様に加熱するとき，‘火力’が弱い間は液体は静止し，もっぱら熱伝導により熱が伝達される．このとき，液体層の状態は水平方向の平行移動に関して不変である．しかし‘火力’が十分強くなると，対流（ベナール対流）が発生して液体層が多数の細胞に分かれる．即ち，細胞の境界がどこかに作られ，液体層の平行移動不変性が破られる．

鉄やニッケルのような強磁性体を微視的に見ると，近隣の原子が同じ方向を向きやすいという性質（強磁性）があり，その結果，巨視的なスケールで原子の向きが揃って，永久磁石になるという現象がある．外部から磁場をかければ，その影響を受けて鉄が磁化するのは当然だが，そのような外界からの働きかけがなくても，近隣どうしの相談だけで自発的に全体の意見が揃い，磁化方向の回転不変性が破られる．

このように世の中には，特定の方向への偏りを見せる現象（対称性が損なわれる現象）でありながら，その現象の背景をいくら探ってみても，特

定の方向を優位とする如何なる要因も見出せないということがある．つまり，自然は「原因のない偏り」を見せる．このような現象においては，生命の連鎖，液体層，磁性体のように，極めて多くの成員が集まって大規模な‘装置’を構成しており，この装置の中で，多数の自由度が互いに影響を及ぼし合っている．その結果，限りなく小さい‘雑音’が系全体のあり方を左右するという事態，即ち**偶然**と呼ばれる現象が起き得るのである．

一般に，有限次元系においては，モデルがある対称性をもっていれば，そのモデルを用いて説明される現象（解）は同じ対称性をもつ．しかし，無限次元系においては，無限に多くの自由度が相互作用することにより，系の対称的な状態が何らかの意味で不安定になると，理論のもつ対称性が現象において破れることがあり得る．これを**自発的対称性の破れ**と言う．問題は，このような現象を‘基本法則’に基づいて説明することである．即ち，巨視的現象を引き起こす微視的メカニズムに踏み込んだ理論に基づいて説明するのである．このような問題において，無限次元系は本質的な役割を果たす．

## ■ 2. 相互作用しないスピン系 ■

話の出発点として，最も簡単な無限次元系である相互作用しない無限個のスピン（磁気モーメントをもつ原子，即ち，微視的な磁石）を考え，微視的視点と巨視的視点の関係を見ておく．

数直線の整数点全体 $\mathbb{Z}$ の上に，1 つずつスピン $\phi_x, x \in \mathbb{Z}$, を配置する．各スピン $\phi_x$ は，実数値をとる確率変数であり，共通の確率分布（確率密度関数）$h(\cdot)$ をもち，互いに独立であるとする．独立性の仮定は，スピンが相互作用しないことを意味する．また，確率分布 $h(\cdot)$ は偶関数であること

$$h(\phi_x) = h(-\phi_x) \tag{1}$$

を仮定し，スピンの向き（上下）に先見的な偏りはないものとする．このとき，スピン全体 $\phi = (\phi_x)_{x\in\mathbb{Z}}$ の確率分布（結合分布密度）$P(\phi)$ は，形式的には，すべての $h(\phi_x)$ の積で表される[*1)]．

$$P(\phi) = \prod_{x\in\mathbb{Z}} h(\phi_x). \tag{2}$$

さて，通常，巨視的な観測装置を用いて，1 個のスピンの状態を測定することはできない．そこで，多数のスピン状態の総和

$$\phi_X = \sum_{x\in X} \phi_x \tag{3}$$

を考える．ただし，$X$ は $\mathbb{Z}$ の部分集合（例えば区間）である．さて，$X$ が巨視的な大きさをもつとき，$\phi_X$ はどのように振る舞うだろうか．中心極限定理によれば，集合 $X$ が大きいとき，$\phi_X$ は近似的にガウス分布（正規分布）に従うことが分かる．以下において，確率分布 $h(\phi_x)$ の特性関数

$$\tilde{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\phi_x} h(\phi_x) d\phi_x \tag{4}$$

を用いて，その議論の道筋を辿ってみる．

まず, $X$ が 2 点からなる場合を考え, $X = \{0, 1\}$ とする．このとき，$\phi_X$ の確率分布 $h_X(\phi_X)$ の特性関数は

$$\begin{aligned}\tilde{h}_X(\xi) &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi(\phi_0+\phi_1)} h(\phi_0)h(\phi_1) d\phi_0 d\phi_1 \\ &= \tilde{h}(\xi)^2 \end{aligned} \tag{5}$$

となる．これを一般化すれば, $X$ が $n$ 個の点からなるとき，$\phi_X$ の確率分布 $h_X(\phi_X)$ の特性関数は

$$\tilde{h}_X(\xi) = \tilde{h}(\xi)^n \tag{6}$$

で与えられることが分かる．

ここで，(6) において $n \to \infty$ とするのは無意味だが，変数 $\xi$ を $\xi/\sqrt{n}$ で置き換えると（適当な仮定の下で）収束する．このことを見るために，

$$\tilde{h}_X(\xi) = e^{-V_X(\xi)}, \quad \tilde{h}(\xi) = e^{-V(\xi)} \tag{7}$$

とおき，(6) を次のように書く．

$$V_X(\xi) = nV(\xi). \tag{8}$$

---

*1） (2) の右辺は一般に収束しない無限積であって，数学的に厳密な定義ではなく，モデルの意味を象徴する表現と考えていただきたい．

そして，$V(\xi)$ を次のように Taylor 展開する．

$$V(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{2k}\xi^{2k}. \qquad (9)$$

ただし，仮定 (1) の下で，$V(\xi)$ が偶関数となること，および，全確率が 1 である条件

$$\tilde{h}(0)=\int_{\mathbb{R}} h(\phi)d\phi=1$$

より，$V(0)=0$ となることを用いた．そこで，変数 $\xi$ を $\xi/\sqrt{n}$ で置き換えれば，(8), (9) より

$$V_X\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}n^{1-\mu}\mu_{2k}\xi^{2k}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mu_2\xi^2$$

のように収束する．即ち，

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{h}_X\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)=e^{-\mu_2\xi^2} \qquad (10)$$

が得られる．ここで

$$2\mu_2=V''(0)=-\tilde{h}''(0)=\int_{\mathbb{R}}\phi^2 h(\phi_x)d\phi_x$$

が成り立つが，(1) の下で，各スピン $\phi_x$ の期待値は 0 であるから，$2\mu_2$ は分散となる．

(10) の右辺は，平均 0, 分散 $2\mu_2$ の正規分布（ガウス分布）

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_2}}\exp\left(-\frac{1}{4\mu_2}\phi^2\right) \qquad (11)$$

の特性関数である．$\xi$ を $\xi/\sqrt{n}$ で置き換えたので，$\phi_X$ の定義 (3) を修正し，

$$\phi'_X=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{x\in X}\phi_x \qquad (12)$$

と置くと，(10) は，$\phi'_X$ の従う確率分布が，ガウス分布 (11) に近づくことを意味する．この事実を**中心極限定理**と言う．

数学的には，若干の技術的仮定を補う必要があるが，上記の議論に必要な本質的な仮定は，確率分布 $h(\cdot)$ が偶関数であること (1) だけであり，この仮定の下で，極めて多くのスピンの総和的な振舞いは，分散 $2\mu_2$ によって定まることが分かる．即ち，スピン系の微視的な性質のほとんどは，巨視的なスケールで消失してしまうので，微視的な性質を変化させても，巨視的な振舞いに影響を与えないのである．この事実を**普遍性**（**universality**）と言う．無限次元系の巨視的な振舞いを調べる際に，このような普遍性のあり方，言い換えれば，系の微視的な性質の中で，巨視的な振舞いを支配しているものを見定めることが重要である．

## ■ 3. 最隣接相互作用 ■

前節では相互作用のないスピン系を考えたので，スピンをどう並べても実質的な意味をもたなかったが，この節では，スピンを格子状に並べて，隣どうしで相互作用する系を考える．

$d$ を自然数として，$d$ 次元の格子

$$\mathbb{Z}^d=\{(x_1,x_2,\cdots,x_d)\mid x_1,x_2,\cdots,x_d\in\mathbb{Z}\}$$

を考え，$\mathbb{Z}^d$ の各点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ にスピン $\phi_x$ を配置する．そして，相互作用のない (2) のような確率分布に相互作用を付け加えるという意味で，スピン全体 $\phi=(\phi_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ の確率分布を，

$$P(\phi)=\frac{1}{Z}e^{U(\phi)}\prod_{x\in\mathbb{Z}^d}h(\phi_x) \qquad (13)$$

と書く．確率は負の値を取らないので，相互作用の影響を $e^{U(\phi)}$ のように書いたが，関数 $U(\phi)$ の形は後で定める．$Z$ は全確率を 1 にするための規格化定数

$$Z=\int e^{U(\phi)}\prod_{x\in\mathbb{Z}^d}h(\phi_x)d\phi_x \qquad (14)$$

である*2)．

相互作用を表す $U$ を，次の形に取る．

$$U(\phi)=\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d}J_{xy}\phi_x\phi_y. \qquad (15)$$

ただし，

$$J_{xy}=\begin{cases}J, & |x-y|=1,\\ 0, & |x-y|\neq 1\end{cases} \qquad (16)$$

---

*2) (13), (14) は，(2) と同様に象徴的な表式である．これらを数学的に厳密に定義するときは，いきなり格子全体 $\mathbb{Z}^d$ にせず，その有限領域だけで考えておいて，格子全体に拡げる極限を取るのだが，このような数学的な正当化については触れないことにする．

であり，$J$ は正の定数とする．(16) において，$x, y$ が隣どうしのときだけ $J_{xy}$ が 0 以外の値をもつので，$U(\phi)$ はスピンが**最隣接相互作用**する状況を記述していると言える．また $J > 0$ であるから，$\phi_x$ と $\phi_y$ が同方向を向くほうが確率的に有利であり，この相互作用は**強磁性的**である．しかし，$U(\phi)$ は 2 次斉次式であるから，$U(\phi) = U(-\phi)$ となり，スピンの向き（上下）は対称的に扱われている．

上記の設定に加えて，単独スピンの確率分布 $h(\phi_x)$ を，$\pm s$ の値を等確率でとる形

$$h(\phi_x) = \frac{1}{2}\delta(\phi_x + s) + \frac{1}{2}\delta(\phi_x - s) \quad (17)$$

とした場合のモデルを **Ising model** と言う．$\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数，$s$ は正の定数である．このようなモデルの振舞いを直観的につかむためには，コンピューターによる数値シミュレーションが役に立つ．即ち，確率法則 (13) に従ってランダムに揺らぐスピン系の「ひとコマ」(サンプル) をコンピューターで無作為に作り出すのである．2 次元の Ising model の場合の結果が文献 1, 4) などに掲載されている．それらを参考にして，スピン系の典型的な様子を言葉で表現して見よう（図 1 も参照されたい）．

まず，相互作用が小さい場合（(16) の $J$ が小さい場合）には，黒でプロットされた $+s$ のスピンと白でプロットされた $-s$ のスピンが胡麻と塩のように，それぞれある程度の大きさの塊をなして混ざり合っている．この状態はスピンの向き $\pm s$ についての対称性が保持されていて，黒点と白点が等量含まれている．この系の広範囲の様子を観察するために，映像をズームアウト（縮小）していくと，黒と白の塊が次第に小さくなり，最終的に一様な灰色の光景へと収束する．これは，前節の中心極限定理の帰結と類似の状況である．

これに対し，相互作用が大きい場合（(16) の $J$ が大きい場合）には，巨視的秩序が発生して，スピン全体が黒または白のどちらかに偏る．どちらに偏るかはランダムに決まるが，黒のほうに偏ると，黒の海面に，ある程度の大きさの白い島が点々と浮かんでいるように見える．この映像をズームアウトすると，島は次第に小さくなり，最終的に一様な海が広がる光景へと収束する．

上記のように，スピン系が見せる様相には，対称性が保たれた相（無秩序相）と，対称性が破れた相（秩序相）があり，$J$ のある一つの値 $J_*$ を境目にして，一方から他方へと転移する．これは無限次元系に特有の現象であり，**相転移**と呼ばれている．

ここで，相転移点 $J_*$ における系は大変興味深い．その様子をコンピューターで描いてみると，大小の沼が至るところに配された沼地に似た複雑な光景となるが，この複雑さには重要な特徴がある．即ち，「沼 (胡麻，海)」にせよ「地 (塩，島)」にせよ，典型的な大きさというものがなく，大小様々の塊が見られ，いくら縮小しても全体の様子が変わらないのである．このような**縮小変換に対する不変性（自己相似性）**は，相転移点の重要な特徴である．

さて，2 次元の Ising model は，いわゆる「可積分系」であり，驚くべきことに，相転移点などを正確に表現する等式が存在する[1)]．しかし，3 次元以上ではこのような計算は不可能であり，モデルの振舞いを分析するために，「きちんと計算する」以外の方法を要する．

## ■ 4. 繰り込み群 ■

きちんと計算できない場合に，スピン系の巨視的な振舞いを調べるために，次のようにする．

**1.** [縮小] 系をどんどんズームアウトして見る．
**2.** [粗視化] 系の微視的な様子についての情報を捨てる．

即ち，系の細かい構造を消去しながら縮小していくのである．この手続きを，2 次元 Ising model に即して，具体的に説明しよう．

図 1 は，スピン $\phi_x$ が $+s$ のとき●で表し，$-s$ のとき○で表したものである．格子 $\mathbb{Z}^2$ を $3 \times 3$ のブロックに分け，図 1 のような●と○の配置に対し，

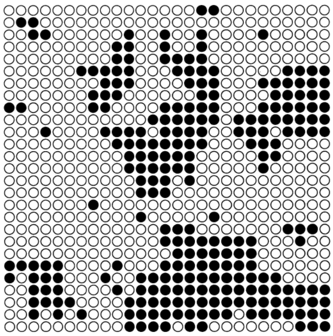


図 1　スピンの配置.

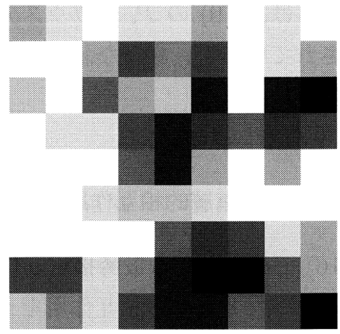


図 2　ブロックスピンの配置.

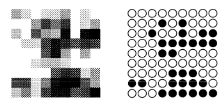


図 3　縮小像.

**(i)**　ブロックごとに●の割合を求め，グレーの濃さで表す（図 2）.

**(ii)**　このパターンを幾何的に 1/3 倍に縮小する（図 3 左）.

**(iii)**　多数決論理で○か●を決める（図 3 右）.

このようにして得られたスピン配置（図 3 右）は，もともとの配置（図 1）を粗視化し縮小した像である．この手続きは何度も繰り返すことができて*3)，次第に系の微視的な情報が失われ，巨視的な様相が浮き彫りになるという結果になる．

上記の手続きを数式化してみよう．まず，$d$ 次元格子において，$x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{Z}^d$ に対し，点 $Lx=(Lx_1,\cdots,Lx_d)$ を中心とする一辺の長さが $L$ のブロックを $\square_{Lx}$ とする．ただし，$L$ は 3 以上の奇数である．そして，ベクトル $\phi=(\phi_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ に対する線形写像 $C$ を

$$(C\phi)_x = L^{-\delta}\sum_{y\in\square_{Lx}}\phi_y\ ,\quad x\in\mathbb{Z}^d \qquad (18)$$

で定め，ベクトル $C\phi$ の要素を**ブロックスピン**と呼ぶ．$\delta=d$ とすれば，ブロックスピンはブロック内のスピンの平均を表し，$\delta=d/2$ とすれば，中心極限定理におけるスピン (12) の定義に相当するものとなるが，都合により，(18) のように一般化しておく．ともあれ，ブロックスピンは，ブロック内で粗視化し，$1/L$ 倍に縮小したスピンの配置を表す．このとき，スピン $\phi$ が確率法則 (13) に従うとして，ブロックスピン $C\phi$ が従う確率法則を $\mathcal{R}P(\cdot)$ と書く．デルタ関数を用いれば，形式的には

$$\mathcal{R}P(\phi') = \int \delta(\phi' - C\phi)P(\phi)\prod_{x\in\mathbb{Z}^d} d\phi_x$$

のように表せる．この $\mathcal{R}$ を**繰り込み群変換**と言う．

さて，粗視化と縮小を繰り返すことにより，系の巨視的な振舞いを捉えるためには，$n\to\infty$ のときの $\mathcal{R}^n P$ の漸近的振舞いを調べればよい．(18) の $\delta$ は，漸近形が見やすくなるように選ばれる．例えば，確率分布 $P$ が定めるスピン系が相転移点にあるとし，

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{R}^n P = P_* \qquad (19)$$

とすると，$P_*$ は $\mathcal{R}P_*=P_*$ を満たすので，繰り込み群変換の不動点となり，自己相似性が成り立つ．また，一つの $P_*$ に対して，(19) を満たす $P$ の全体は，微視的に異なりながら巨視的には区別できないという意味で，「普遍性」を満たす状態の集合を与える．また，$\mathcal{R}^n P$ の漸近的振舞いに注目して $P$ を分類すれば，スピン系の相が区別される．

このように繰り込み群の描像は，ある意味で直観的に単純だが，実際の繰り込み群解析は大変手間がかかる．特に，数学的に厳密な扱いは，主に $h(\cdot)$ がガウス分布に近い場合を中心に追求されてきた．他方，未解決問題も残されており，例えば，4 次元格子上の Ising model の場合，$P$ が相転移

*3)　ただしこの際，(iii) の手続きは不要であり，(i) と (ii) を交互に繰り返せばよい.

点にあるならば，(19) の $P_*$ はガウス分布であろうと予想されているが，厳密な証明はまだ知られていない[2)]．

## ■ 5. 階層的相互作用 ■

(15), (16) で与えられる最隣接相互作用を修正し，離れたスピンどうしの相互作用をうまく付加したもの—**階層的相互作用**—を用いると，繰り込み群変換 $\mathcal{R}$ が著しく簡略化することが知られている．このモデルに関して，相転移の繰り込み群的描像を具体的に見ておこう．

$U$ を階層的相互作用に取ると，(13) で与えられる $P$ の繰り込み群変換 $\mathcal{R}P$ は，ある $h'$ を用いて，再び (13) と同じ形

$$(\mathcal{R}P)(\phi) = \frac{1}{Z'} e^{U(\phi)} \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} h'(\phi_x) \qquad (20)$$

に表せる．この形の繰り込み群変換 $h' = \mathcal{R}h$ を繰り返したときの軌道

$$h_n = \mathcal{R}^n h, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad (21)$$

を考える．軌道の出発点 $h$ としては，Ising model の単独スピンの確率分布 (17) を取る．

(17), (21) で定まる $h_n$ について，(4), (7), (9) と同様に，特性関数を $\tilde{h}_n$ とし，

$$\tilde{h}_n(\xi) = e^{-V_n(\xi)}\ , \quad V_n(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{n,2k} \xi^{2k}$$

と書く．図 4 は，4 次元の階層的相互作用の場合に，いくつかの $s$ の値に対し*4)，点列 $\left(\mu_{n,2}, \frac{\mu_{n,4}}{\mu_{n,2}^2}\right)$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，をプロットしたものである*5)．a,b,$\cdots$,h の 8 本の軌道は，上から下に向かって流れ，i,j,k の 3 本の軌道は，上から下に，そして右上に向きを変えて流れる．a,b,$\cdots$,h では相互作用が弱く（$s$ が小さく），モデルは対称性が保たれている相に属し，i,j,k では相互作用が強く（$s$ が大

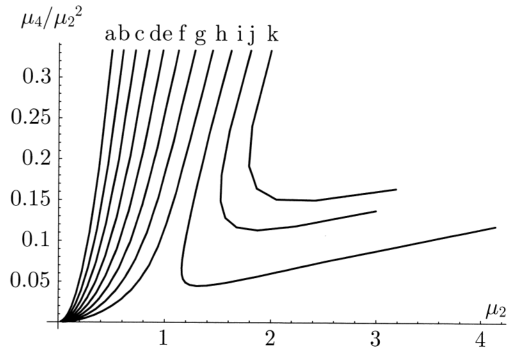



**図 4**　4 次元階層的 Ising model の繰り込み群軌道．

きく），対称性が破れた相に属する．h と i の間に相転移点がある．実は，相転移点での軌道は点 (1, 0) に近づき，極限確率分布はガウス分布になる[3)]．

このように，繰り込み群を用いると，相転移点やその周辺での系の性質を直観的に把握することができ，また，繰り込み群軌道を精密に追跡すると，相転移点近傍での系の特異な振舞いを定量的に評価することができる．

この解説では，スピン系に即して，無限次元系の相転移と繰り込み群の描像を簡単に紹介した．もう一つの重要な無限次元系の例である「場の理論」に触れることができなかったが，この点も含めて詳細を学ぼうとする読者は，文献 4〜6) などのテキストを参照されたい．

### 参考文献


1) 西森秀稔，『相転移・臨界現象の統計力学』，培風館，2005.
2) R. Fernández, J. Fröhlich, A.D. Sokal, *Random walks, critical phenomena, and triviality in quantum field theory,* Springer, 1992.
3) T. Hara, T. Hattori, H. Watanabe, Triviality of hierarchical Ising model in four dimensions, *Commun. Math. Phys.*, **220**, 2001, 13–40.
4) 江沢洋他，『くりこみ群の方法』，岩波書店，1994.
5) J. Zinn–Justin, *Phase transitions and renormalization group*, Oxford University Press, 2007.
6) M.L. Bellac, *Quantum and statistical field theory*, Oxford University Press, 1991.

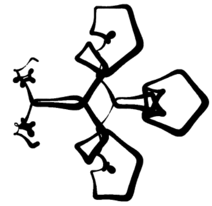


（わたなべ・ひろし，日本医科大学数学教室）


*4)　$\phi_x$ を $s\phi_x$ で置き換えれば，(17) において $s = 1$ となり，(16) において $J_{xy}$ が $s^2$ 倍になるので，$s$ の値を変えることは，相互作用の強さを変えることと同等である．

*5)　ガウス分布の場合 $\mu_4 = 0$ であるから，ガウス分布はこの平面の横軸上に位置する．

# 無限次元の幾何学



前田 吉昭

## 1. 無限次元の幾何学へ

「図形の理解」という考えが幾何学を生み出し，数学として発展させた．さらには，物理学，天文学，地理学や測量学といった様々な学問分野からの影響を受け，またそれらにフィードバックする形で幾何学が発展してきたと言える．$\sqrt{2}$ という数は，一辺が1の正方形の対角線の長さという幾何学的意味があり，ニュートン力学による質点の運動，さらには惑星の運動を定めるケプラーの法則などが幾何学を発展させてきた典型的な例と言えよう．

歴史的に見て，幾何学の基本となるのは，**「空間」**の概念である．端的に言えば，三角形や多角形その他の図形を考えるためには，2次元平面が必要であり，それにより測量学や地理学に必要な地図が描けるからである．また，ニュートン力学による運動の法則を記述するためには，質点が運動する「3次元空間」が必要である．このような様々な学問の基盤を数学的に統一させたのが，**「ユークリッド幾何学」**である．このユークリッド幾何学を原点とする「幾何学」の基本的対象物は**「空間」**であり，それを構成する基本単位が「点」の概念である．数学的には，空間は点の集合というものであるが，物理学や天文学の中でも，「空間」概念として共通に理解ができるのは，3次元（あるいは2次元）ユークリッド空間そのものであろう．しかしながら，「空間」の概念は，数学からもまた物理学からも様々な学問の発達の中で変遷する．「点」というものやその全体を把握する「空間」というものは，どこまで拡大解釈されていくものであろうかと考えていくことで，実際には無限次元の幾何学へ導びかれていくだろう．



図1　ユークリッド．

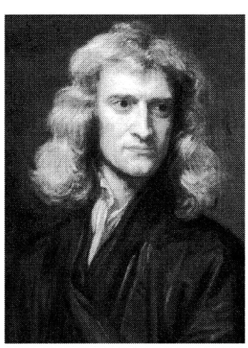


図2　ニュートン．

## 2. 静的な状態を考えることによる空間概念の拡張

静的な状態を考えている間では，**「点」**というのは，平面や空間の点として確定させることにそれほどの異議はないだろう．動的な状態，例えば運動を考えていくと，それは少しずつ考え方の変化がでてくる．

ニュートン力学では，「質点」の運動を理解するが，これはユークリッド空間での「点」の時間発展を扱うものである．3次元ユークリッド空間の

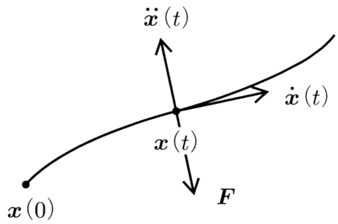



**図 3**　点の流れ．

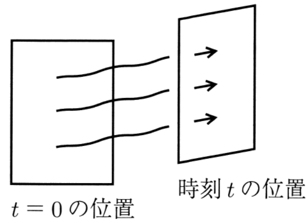



**図 4**　時刻による点の対応．

点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ がどのように時間とともに変化するかを記述することを考える．ニュートン力学では，その運動は加速度が力 $\boldsymbol{F}$ に比例するという運動の第二法則：

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}(t)}{dt^2}=m\boldsymbol{F} \tag{1}$$

で記述される（図 3）．これは，2 階の微分方程式であるから，解くべきものは，「点」だけではなく，その運動のモーメントも分かるべき対象となる．実際，Hamilton 力学系では，「点」の運動を記述するためには，「**配位空間**」という実際の点とそのモーメントを対にした「点」で運動を記述する．ここで注目しておくことは，「点」に付随した情報量を付け加えた「点」概念が設定されているということである．

さらに付け加えることは，微分方程式という技術的な問題もあるが，運動の記述は，初期状態を与えることによりその時間発展が与えられるというものである．これは，ある「点」の動きを記述するというばかりではなく，空間のあらゆる「点」の動きが記述されるということになる．したがって，運動というのは，実際には，空間の与えられた「点」に対して，違う「点」（時刻発展による）を対応させる（写像）の概念が自然に導入されることになる．

## 3. 無限次元リー群

ニュートン力学の例を上で説明したが，もう少し詳しく説明を加えてみよう．古典力学としては，ある時刻，ある点において質点が物理法則に従ってどのように運動をすればよいかという記述をすれば十分であるが，考える空間のすべての点において，それが時刻の変化とともに一斉にどのように動いていくかを記述しようとすると，一径数変換群を導入する必要がある．例えば，3 次元ユークリッド空間の点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ を考えてみる．この点が時刻とともにどのように変化するかを記述しようとすると，時刻 $t$ の変化後の位置を $\boldsymbol{y}(t)=(y_1(t),y_2(t),y_3(t))$ とすると，$\boldsymbol{y}(t)$ は，$\boldsymbol{x}$ によっている（図 4）．したがって，$\boldsymbol{y}(t)$ の各成分 $y_i(t),\ i=1,2,3$ は，$y_i(t)=y_i(t,x_1,x_2,x_3)$ という $x_1,x_2,x_3$ によることになる．ここで，$\phi(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}(t)$ とおくことにより，$\phi(t,\cdot)$ は，$\mathbb{R}^3$ の変換と見ることができる．古典力学が実際には質点の個々の情報を捉えるのに対して，それ全体を総括して把握するという考え方である．

この考え方をとれば，古典力学や点の運動は，すべて変換として理解されることになる．このような変換全体を考えることが，古典力学を把握するという立場にたつことができる．少し大上段に構えれば，空間の変換をすべて考えることにより，古典的な運動のすべてを把握するという考えに到る．そこで，「**運動のすべてを考える**」器は，空間の（ある条件のついた）変換全体というようなものであり，これは「**無限次元**」の対象物となる．一方，空間の変換あるいは変換群群というのは，もっと素朴に考えられてきた．平面の図形を保つ（例えば三角形の合同変換）や 1 次変換といったものである．これらは，決して時刻という概念は含んではいないが，点集合を点集合に移すもの（変換）である．幾何学的対象物を保つという制限を与えると，変換群は有限次元に収まるが，一般的にはこの群は無限次元となる．実際，古典力学の枠の

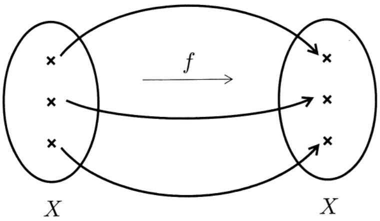



図 5　点の変換.

中での変換群は無限次元の群となるのが一般的である（例えば，体積を保存する変換の全体，シンプレクティック構造を不変にする変換全体など）．有限次元となる変換群は，リー群と呼ばれる多様体の構造と群の構造を持ち合わせた扱いのよい対象となる．一方で，無限次元群となる場合は，それなりに面倒なものとなることは確かである．しかしながら，有限次元での場合の理論を無限次元へと展開する（**バナッハ空間**，**ヒルベルト空間**，**フレッシェ空間**）ことにより，これらの群を把握する理論が構成できる．

この考えを展開することで，「点」概念をさらに拡大する変換の概念が作られる．抽象的には「変換」は対象物を他の対象物へ移すという作業であるので，これには，必ずしも「点」の変換にこだわる必要はないからである．例えば，3 次元空間の上の関数の集合 $X$ を考え，その上の変換 $f: X \to X$ を考える（図 5）．3 次元ユークリッド空間の上の変換であれば，$X$ は 3 次元ユークリッド空間であるが，この場合は，$X$ が関数の空間に変わっていることに注意する．すなわち，無限次元空間の上の変換を考えている．量子力学の設定がここにある．量子力学では，例えば 3 次元ユークリッド空間の点の個々の動きを調べることはせず，確率論的な解釈を与えることであった．その立場は，例えば，3 次元ユークリッド空間の $L^2$ 可測（ユークリッド内積を使って定義される 2 乗可測）な関数全体の空間（観測量）がどのように変化するか（時間とともに）を考える．その結果，変換は，積分核 $K(x,y)$ を持つ積分変換

$$K_t(f)(x) = \int K(x,y)f(y)dy \qquad (2)$$

で表されるものとなる．この中で，量子力学の対応原理を加味することから得られる変換群として逆を持つ 0 次フーリエ積分作用素の全体のなす無限次元リー群であり，その無限小変換群は，1 次の擬微分作用素全体のなす無限次元リー環である．

無限次元での幾何学の把握は，第一に空間の個々の点の動きを調べるのではなく空間全体を総括する変換を考えることにより，無限次元の対象物が創出され，さらに「点概念」を拡大していくことにより大きな群概念を構築することができている（文献 2) を参照）．

## 4. ユークリッド空間からの空間概念の拡張へ

例えば，「地球」という空間，これは，ユークリッド空間が「平坦」な空間であるというものから，「曲った」空間の概念を引き出してくる．この発展がリーマン空間であり，「**多様体**」という大域的な空間概念を作り上げるもととなる．一方，物理学では，相対性理論から，空間概念が広がっていく．アインシュタインの「時空」という考え方が，より空間概念を広げていくことになる．いずれにしても，「空間」の把握は，「点」が基本単位となっており，すべての幾何学は「点」から出発し，構成されている．

この「点」概念を強く押し出す幾何学として，射影幾何学がある．実際，射影幾何学は「点」，「直線」，「平面」を構成要素として，これらに公理を課すことで，幾何学を展開する．その意味では，強く「点」概念を主張するものであり，幾何学のエキスを抽出した最も抽象化された考え方であると言える．一方で，歴史が示すように，「点」の概念は，様々な学問の発展の中で，より柔軟に扱われるようになる．相対性理論においての「時空」での「点」でさえ，「**時間発展の中での点**」を理解せよというように，かなり抽象的な概念の理解を求められることになる．しかしながら，この時点までの物理学からは，まだ私たちがこれらを「点」として考え，その集合体を「空間」として受け入れることができるものと言える．

## 5. モジュライ空間

今まで述べてきたように，幾何学は「点」の集まりというかなり固定された「空間」概念を基礎として展開されてきた．これを大きく変革する考えが，モジュライ空間である．モジュライは，一つ一つの対象物が，むしろ「空間」である．言ってみれば，空間の集まり（空間族）である．この考え方の下にあるのは，複素多様体の理解にある．簡単な例としては，2 次元トーラスを考える．標準的な 2 次元トーラスは基本領域

$$z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

で表されるが，このトーラスには基本となる空間とその上に複素構造が含まれている．この標準的なトーラスの場合は，複素構造は 2 次元平面を複素平面として考えたものとなる．ところで，位相的に同じ 2 次元トーラスに違う複素構造を入れることができ，これは，

$$M_1 = H/PSL(2, \mathbb{Z}) \tag{3}$$

で与えられる．ここで，$H$ は複素平面の上半平面 $\{z \in \mathbb{C} | Imz > 0\}$ であり，$PSL(2, \mathbb{Z}) = \{\gamma(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\}$ はモジュラー群である．この空間 $M_1$ には複素構造が入り，$\mathbb{C}$ と双正則同値になる．この $M_1$ をトーラスのモジュライ空間と言う (図 6，詳しくは，文献 1) を参照)．

さらに一般のリーマン面についてその複素構造の**モジュライ空間**を調べることができる．これをさらに詳しく調べるために，基本群の標準生成系を用いて標識つきのトーラス全体を扱ったものが**タイヒミューラー空間**と呼ばれるものである．コンパクトリーマン面の場合はタイヒミューラー空間は有限次元であるが，非コンパクトなリーマン面に対しては一般に無限次元となる．このように，空間の上の幾何学的構造全体を考えることにより，より大きな「空間」概念が生まれてくる．典型的な例は，有限次元多様体の上の様々な幾何学的対象のなす集合 (空間) である．例えば，コンパクト多様体の上のリーマン計量の空間，4 次元コンパクト多様体の上のベクトル束の接続空間といったものである．これらには，多様体上の微分同相写像群やゲージ変換群という無限次元リー群の作用があり，これを同一視することで商空間が得られる．これがモジュライ空間である．モジュライ空間のよいものは，それが有限次元まで落とされることがあり，(例えば 4 次元自己双対接続の空間) これが現実の時空概念を与えるもとにもなると考えられる理論が展開されるからである．

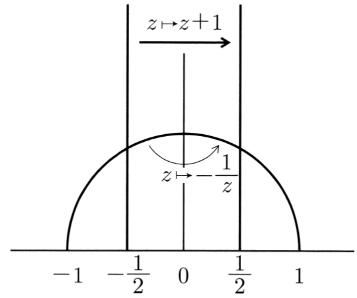



**図 6**　トーラスのモジュライ空間（矢印は同一視を意味する）．

## 6. 無限次元空間の幾何学の展開

例えば，コンパクト多様体 $M$ の上のリーマン計量全体の空間 $\mathcal{M}$ を考えてみよう．これは無限次元の対象物である．実際，多様体上 $(0, 2)$ 型テンソルの空間（これはベクトルバンドルの切断全体と言える）はベクトル空間であり，リーマン計量というのはその中で，対称性と正定値性の条件を加えるので $(0, 2)$ 型テンソルの空間の部分空間 (対称性を持つテンソル全体) において開集合となる．空間としては，無限次元であるが，性質はそれほど悪くない（有限次元で言えば，ユークリッド空間のなかで錘面を書いたようなものである)．これに有限次元を見習って，「点」がリーマン計量となる幾何学を展開してみよう．その「点」の接空間を考えれば，これは「点」が運動した際の曲線の接線の集合であるので，これは $(0, 2)$ 型対称テンソルの空間である．それによって，ベクトル場は，各リーマン計量の「点」に $(0, 2)$ 型対称テ

ンソルを与えることになる．これらを把握していくためには，幾何構造を入れていくと有効になる．例えばリーマン計量 $g$ における接空間にヒルベルト内積 $\langle , \rangle_g$ を入れる．リーマン計量の $g$ における接空間の元 $X_g, Y_g$ （それぞれ $(0,2)$ 型対称テンソル）に対して，

$$\langle X_g, Y_g \rangle_g = \int_M g(X_g(p), Y_g(p)) dvol_g(p) \quad (4)$$

として定義する．ここで，$dvol_g$ はリーマン計量から作られる体積要素である．さらにこの内積を拡張してソボレフ内積を入れることもできる．こうすることにより「点」は有限次元の点から拡張はされるが，ユークリッド空間で行ってきたこと（内積から出発してユークリッド幾何学やリーマン幾何学を進める）が実行できる．さらには，リーマン接続や曲率といった概念が有限次元と同様に導入されていくことになる．前節で述べた，ゲージ理論では，接続（あるリー環に値をとる局所1形式）の全体にこのような，内積やリーマン接続等を同様に考えていく．

無限次元の幾何学は，出発点は関数解析的な設定をする必要があるが，幾何学的にはそれほど複雑な構造を扱うわけではない．ただ，この中から幾何学的な量を取り出す際に，技術的な問題点がいろいろ生じてくる．典型的なものは，例えば，リッチ曲率のようなものである．様々な無限次元多様体のモデルとなるものでは，**ケーラー構造**のようなものが自然に入れられることがある（もちろん無限次元の意味である）．そのようなときに，**チャーンクラス**のようなものが定義されるかという問題が考えられる．ところが，これはある種のトレースを取る問題で，常に発散の問題がまとわりつく（大体が無限大発散を持っている）．そこで，様々な無限大発散を処理する技術が必要となる．一つは **regularization** と呼ばれる，作用素のトレースをうまく処理する技術である．この意義は，このような発散の処理から，幾何学的な不変量を見つけてくることである．

もう一つの考え方は，**リダクション**である．これは，無限次元空間あるいは無限次元多様体という対象物への作用を考えることである．例えば上の，コンパクト多様体の上のリーマン計量全体の空間を考えると，そこには多様体の微分同相群という無限次元リー群が作用する．リーマン計量全体の空間というのは，実際にはこの作用で同一視して考えるほうがより自然であるので，この群で割った商空間を考えるほうがよりよいことになる．そこでこの商空間で割ることを考え，ここで幾何学を展開することにすると，無限次元リー群の部分が貢献する無限大発散を取り除くことができる．このようなアイデアを使って無限大発散の処理を進める．ただ，これではまだ十分ではなく，実際には「有限次元」へのリダクションが必要になる．ゲージ理論の場合は，いわゆる双対接続や平坦接続の空間（さらにはこれをゲージ群で割った空間）までリダクションをすることで，有限次元空間の興味ある例が逆にいろいろ与えられるということになる．

世の中の複雑構造は，実際には「簡単な」空間（無限次元であるが）から構成されるということをこのリダクションという考え方で説明ができる．その意味では，より簡単な無限次元空間や無限次元多様体を扱うことに意味がある．

## 7. 弦の運動空間

素朴な問題として，はたして質点だけの運動を理解することだけで，世の中を理解できるかという疑問は誰もが持つだろう．実際，物理では「ひも」や「面」の運動を考える．これが，弦理論であり，またさらに一般化された面理論と言える．数学でもこのような運動を考えるアイデアはもちろんあったが，実際には物理ほど説得力はなかったとも言える（このあたりが数学の苦渋でもある）．それはともかく，例えば「ひも」の運動を考える（図 7）．これをあくまで「点」としてこだわって，その空間を考えてみると，これは写像

$$X : [0,1] \longrightarrow X \qquad (5)$$

という形で表現できる（閉弦）．ここで幾何学を展

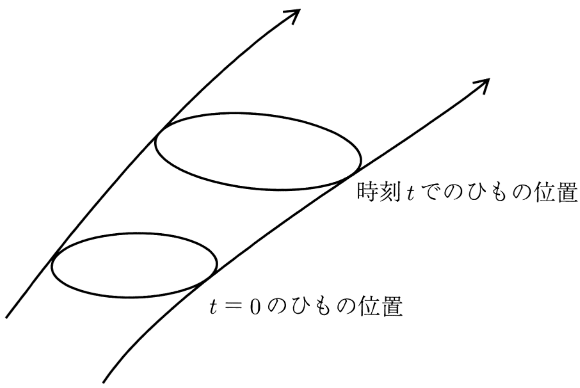



図7　ひもの運動.

開したいというのが，場の量子論に対応することである．Atiyah–Witten はこれに対して，この上での指数定理の確立を目指した．しかしながら，この問題はかなり困難であることがわかっているが，大変興味ある問題である．Bismut はこれについて，解析指数，特に無限次元の Dirac 作用素の数学的設定を行い解析指数の定義を確立することを目指しているがまだまだ困難な問題である．一方，Maeda–Rosenberg 等は，現在位相的指数に相当する弦空間での Chern–Simons 理論の構成を試みている．この問題でも，いわゆる無限大の発散の問題が派生してくるために，まだ満足が得られる結果ではないが，このような挑戦がいつか日の目を見ることを夢見ている．

## 8. 非可換幾何学へ

「空間」概念を大きく変革させる要因は，量子力学の出現である．量子力学では，個々の「点」の現象では説明がつかず，確率的解釈で理解をすべきであるというのが主張となる．こうなると，従来の「幾何学」の根本を崩すことになり，一体「点」というのが何であるのかということを反省させられることになる．今まで述べた無限次元への拡張という考え方の中で「点」という役割が拡大解釈されてることが理解できると思うが，観測できるものが，いわゆる「点」ではなく，観測量（点の関数）となったときに，「観測量の空間」での「変換」というものが必要となるのである．

無限次元の幾何学の最終的な目的は，量子幾何学の確立だと考えている．今まで述べたように，幾何学は「点」を基礎とした概念で出発してきた理論であるが，量子物理学，特に場の量子論に対して幾何学が対応するためには，今までの幾何学的構成を根本から変える必要が生じてきていると思える．それは，基本的には，「点」をもとにした幾何学的構成を打破することである．その基本姿勢は，非可換幾何学にある．非可換幾何学では，もはや「点」という概念設定は打ち消され，あるのは，「観測量」によって幾何学を書き上げるという考えである．実際にはこれが一つの試みだとは思えるが，これが本質的に量子論に答えられる幾何学であるかどうかはまだまだ歴史が証明するところまでには到達していないだろう．しかしながら，新しい幾何学の創出として，様々な試みがあることは確かであろう．無限次元の幾何学は，その意味で，一つの方向性を示すものであると考えられる．無限次元変換群とモジュライ空間の幾何学の延長に新しい幾何学として，非可換幾何学があると信じている（文献 3) 参照）．

### 参考文献

1) 今吉洋一，谷口雅彦；『タイヒミュラー空間論』，日本評論社．
2) 大森英樹；『無限次元 Lie 群論』，紀伊国屋数学叢書 15，紀伊国屋書店．
3) 大森英樹，前田吉昭；『量子的な微分・積分』量子数理シリーズ 1，シュプリンガー・ジャパン．

（まえだ・よしあき，慶應義塾大学理工学部）

# 無限次元代数

## 作用素環入門

松井　宏樹

### 1. はじめに

ずいぶん昔の話になるが，劇団夢の遊眠社の芝居で野田秀樹扮する老数学者の台詞に「1 じげんと 2 じげんの間には長さがある．2 じげんと 3 じげんの間には高さがある．3 じげんと 4 じげんの間には時間がある．そして，4 じげんと 5 じげんの間には給食がある.」というのがあった．本稿の目的は，有限次元と無限次元の間にあるものを作用素環を通じて紹介することである．無限次元の線形空間（正確にはヒルベルト空間）に作用する線形写像（正確には有界線形作用素）たちがなす代数を，**作用素環**と呼ぶ．普通，積を併せ持った線形空間は環ではなく代数（algebra）と呼ばれるから，作用素代数という呼び名が適切かも知れない（実際英語では operator algebra である）が，作用素環の用語が定着してしまっているので，それに倣う．大学の理系学部に入学した学生はたいてい初年度に線形代数学を学ぶ．線形代数学で扱う対象は有限次元の線形空間やその間に働く線形写像であり，具体的には，行列の四則演算・行列式の定義と計算・基底や次元の概念・行列の対角化やジョルダン標準形などの項目が，講義のシラバスに並ぶ．無限次元の線形空間として誰もがまず最初に考えるのは，数を無限個並べたベクトルがなす空間（すなわち数列全体の空間）であろう．確かにこれは無限次元の線形空間ではあるが，通常は解析学の研究対象とはならない．なぜなら意味のある位相（近いとか遠いという概念が考えられるような構造）が入らないからである．無限次元線形空間や無限次元代数を取り扱うためには，代数的な構造のみならず，極限操作を可能にするような完備な位相が必要となるのである．

完備な位相を持つ無限次元線形空間の中で最も基本的なのがヒルベルト空間である．以下，線形空間はすべて複素数を係数とするものを考える．複素数の数列で絶対値の二乗和が有限であるものの全体を $l^2$ と書く．すなわち

$$l^2 = \left\{ \xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \mid \xi_n \in \mathbb{C}, \sum |\xi_n|^2 < \infty \right\}$$

である．$l^2$ は線形空間であることが簡単に分かる．$\xi, \eta \in l^2$ に対して

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n}$$

と決める．写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : l^2 \times l^2 \to \mathbb{C}$ は第 1 成分に関して線形で，$\langle \eta, \xi \rangle = \overline{\langle \xi, \eta \rangle}$, $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$ を満たし，$\langle \xi, \xi \rangle = 0$ となるのは $\xi = 0$ のときのみである．このような写像は内積と呼ばれる．$\xi \in l^2$ に対して $\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$ と決めると，$(l^2, \|\cdot\|)$ は完備なノルム空間，すなわち**バナッハ空間**となることが知られている．ノルムが内積によって与えられるようなバナッハ空間を，**ヒルベルト空間**と呼ぶ．$l^2$ は可分な無限次元のヒルベルト空間であり，またそのようなヒルベルト空間はすべて $l^2$ に同型であることが知られている．$n$ 番目だけが 1

で他の成分はすべて 0 であるような数列を $e_n$ とする．任意のベクトル $\xi \in l^2$ は，ノルム収束する無限和

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, e_n \rangle e_n$$

の形に書き表せる．つまり任意のベクトルは $e_n$ たちの（無限）1 次結合である．このとき $\{e_n\}_n$ は $l^2$ の（ヒルベルト空間としての）**基底**であると言われる．線形代数学でも基底という概念を習うが，それとは異なることに注意しよう．

## 2. $C^*$ 環の定義と例

作用素環は大きく **$C^*$ 環**と **von Neumann 環**に分かれる．まずは $C^*$ 環の定義を述べたい．$l^2$ から $l^2$ への線形写像 $T$ が，

$$\|T\| = \sup\{\|T\xi\| \mid \|\xi\| \le 1\} < \infty$$

を満たすとき，$T$ を**有界線形作用素**と言う．次の定理は関数解析学の初歩で必ず習う事実である．

**定理 1.** 線形写像 $T : l^2 \to l^2$ に対して次は同値．
**(1)** $T$ は有界線形作用素である．
**(2)** $T$ は連続である．

$l^2$ から $l^2$ への有界線形作用素の全体を $B(l^2)$ と書く．他方，$n$ 次元ヒルベルト空間 $\mathbb{C}^n$ 上の線形写像は常に連続であり，その全体は $\mathcal{M}_n$ と書かれる．$\mathcal{M}_n$ は $n$ 次複素正方行列の全体と思える．$B(l^2)$ は $\mathcal{M}_n$ の無限次元版である．$B(l^2)$ は上で定めた $\|\cdot\|$（作用素ノルムと呼ばれる）によってバナッハ空間となる．

**定義 2.** $B(l^2)$（あるいは $\mathcal{M}_n$）の部分空間 $\mathcal{A}$ が
**(1)** $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow AB \in \mathcal{A}$,
**(2)** $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^* \in \mathcal{A}$（$A^*$ は $A$ の共役作用素），
**(3)** $\mathcal{A}$ はノルム位相で閉集合
を満たすとき，$\mathcal{A}$ を $C^*$ 環と呼ぶ．$C^*$ 環 $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への線形写像で積と $*$ 演算を保つものを，準同型と呼ぶ．$C^*$ 環の間の準同型は常に連続となることが知られている．$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への準同型で全射かつ単射であるものが存在するとき，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は同型であると言う．

定義により $B(l^2)$ や $\mathcal{M}_n$ は $C^*$ 環である．本来は $C^*$ 環を抽象的な公理によって定義するのが普通であり（荒っぽく言えば，$*$ 演算を持つバナッハ環で，$\|A^*A\| = \|A\|^2$ が満たされるものを $C^*$ 環と言う），その場合には上の定義は「任意の（可分）$C^*$ 環は $B(l^2)$ の部分環である」という定理に変化するが，ここでは深入りしない．$C^*$ 環における積は非可換である（つまり $AB = BA$ であるとは限らない）ことにも注意しよう．無限次元であることと非可換であることが $C^*$ 環の特徴である．

$C^*$ 環の面白い例を挙げよう．$\mathcal{M}_{2^n}$ から $\mathcal{M}_{2^{n+1}}$ への準同型 $\varphi_n$ を

$$\varphi_n : A \mapsto \begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix}$$

で定める．$\varphi_n$ は単射であるから，$A$ と $\varphi_n(A)$ を同一視することにより，$\mathcal{M}_{2^n}$ を $\mathcal{M}_{2^{n+1}}$ の部分環と見なせる．これによって

$$\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_4 \subset \mathcal{M}_8 \subset \cdots$$

という $C^*$ 環の増大列が得られ，$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{2^n}$ はノルムと $*$ 演算を備えた代数となる．そしてそのノルム位相による完備化は自然に $C^*$ 環となることが知られている．この $C^*$ 環を $\mathcal{M}_{2^\infty}$ と書こう．$\mathcal{M}_{2^\infty}$ は（$2^\infty$ 型の）**UHF 環**と呼ばれる．このようにして $C^*$ 環の増大和の完備化として構成される $C^*$ 環を **帰納的極限 $C^*$ 環**と呼ぶ．

一般に $C^*$ 環の元 $P$ で $P = P^* = P^2$ を満たすものを**射影**と呼ぶ．$P$ が $\mathcal{M}_n$ の射影のとき，ユニタリー行列 $U \in \mathcal{M}_n$（つまり $U^*U = UU^* = I_n$）があって

$$UPU^* = \begin{bmatrix} I_k & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad (I_k \text{ は } k \text{ 次単位行列})$$

となる（これは線形代数学の練習問題）．したがって，$\mathcal{M}_n$ のトレースを $n$ で割って正規化したものを $\mathrm{tr}_n$ とするとき，

$$\mathrm{tr}_n(P) \in \{k/n \mid k = 0, 1, 2, \cdots, n\}$$

となる．射影 $P$ が $\mathbb{C}^n$ に作用していると思うとき，$\mathrm{tr}_n(P)$ は $P$ の値域の次元を，全空間の次元が1となるように相対化した上で，測っていると見なせる．

UHF 環の状況に戻ろう．明らかに $\mathrm{tr}_{2^n} = \mathrm{tr}_{2^{n+1}} \circ \varphi_n$ であるから，$\mathrm{tr}_{2^n}$ は自然に線形写像 $\tau : \mathcal{M}_{2^\infty} \to \mathbb{C}$ に伸びる．$\tau$ は

**(1)** $\tau(I) = 1$（$I$ は $\mathcal{M}_{2^\infty}$ の単位元），
**(2)** $\tau(A^*A) \geq 0$,
**(3)** $\tau(AB) = \tau(BA)$

を満たす（なぜならもともと $\mathrm{tr}_{2^n}$ もこれらの性質を持っていたから）．一般に $C^*$ 環 $\mathcal{A}$ から $\mathbb{C}$ への線形写像で上の性質を満たすものを $\mathcal{A}$ 上の**トレース**と言う．$\mathcal{M}_{2^\infty}$ はトレースを一つしか持たないことが知られている．さて $\mathcal{M}_{2^\infty}$ の射影がトレース $\tau$ によって取り得る値はどうなるだろうか．上で見たように，$\mathcal{M}_{2^n}$ の射影が取り得る「次元」は $k/2^n$ であった．$\mathcal{M}_{2^n}$ たちの極限である $\mathcal{M}_{2^\infty}$ に対しては，実は

$$\{\tau(P) \mid P \text{ は } \mathcal{M}_{2^\infty} \text{の射影}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{k}{2^n} \,\middle|\, k = 0, 1, 2, \cdots, 2^n \right\}$$

となることが知られている．つまり，ノルム位相による完備化をしたぐらいでは，射影のトレースによる値は増えないのである．今は $2^\infty$ 型の UHF 環に関して説明をしたが，他の型でも同様であり，特に $2^\infty$ 型と $3^\infty$ 型は非同型であることがこの考察から直ちに分かる．

## 3. von Neumann 環

$T \in B(l^2)$ を含む部分集合で，有限個のベクトル $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ を用いて

$$\{S \in B(l^2) \mid \|(S - T)\xi_i\| < 1, \ \forall i\}$$

と表されるものを考え，それらが $T$ の基本近傍系をなすような $B(l^2)$ の位相を，**強作用素位相**と呼ぶ．$T$ と $T_1, T_2, \cdots$ が $B(l^2)$ の元で，

$$\lim_{n\to\infty} \|(T - T_n)\xi\| = 0, \quad \forall \xi \in l^2$$

が成り立っているとき，列 $(T_n)_{n=1}^\infty$ は $T$ に強作用素位相で収束していることが分かる．一般に

$$\|S_n\| \to 0 \ \Rightarrow \ \|S_n\xi\| \to 0, \quad \forall \xi \in l^2$$

だから，強作用素位相はノルム位相よりも弱い（弱いのに「強」とついているのは，それよりさらに弱い弱作用素位相があるからである）．有限次元ならばノルム位相と強作用素位相は一致する（これも簡単な練習問題）．しかし無限次元では，次の例が示すように2つの位相は一致しない．$\{e_n\}_n$ を1節で定めた基底とする．$V \in B(l^2)$ を $Ve_n = e_{n+1}$ によって定める．$V$ は $\|V\xi\| = \|\xi\|$ を満たすので，等長作用素と呼ばれる．$V$ の共役作用素 $V^*$ は

$$V^*e_n = \begin{cases} 0 & n = 1, \\ e_{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$$

を満たすことが簡単に分かる．したがって，$k \geq n$ ならば $(V^*)^k e_n = 0$ となり，ここから $((V^*)^k)_k$ が0に強作用素位相で収束することが分かる．ところが $\|(V^*)^k\| = \|V^k\| = 1$ だから，$((V^*)^k)_k$ はノルム位相では0に収束しない．作用素 $V$ は unilateral shift と呼ばれ，有限次元と無限次元の違いを表す典型例である．

**定義 3.** $C^*$ 環 $\mathcal{N} \subset B(l^2)$ が，$B(l^2)$ の単位元（つまり $l^2$ 上の恒等作用素）を含み，強作用素位相で閉じているとき，$\mathcal{N}$ を von Neumann 環と呼ぶ．

$\mathcal{M}_{2^\infty}$ を前節で考察した UHF 環としよう．$A, B \in \mathcal{M}_{2^\infty}$ に対して $\langle A, B\rangle = \tau(B^*A)$ と定めると，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathcal{M}_{2^\infty}$ における内積となる．この内積によるノルムを $\|\cdot\|_2$ と書く．つまり

$\|A\|_2 = \tau(A^*A)^{1/2}$ である．$\mathcal{M}_{2^\infty}$ は $\|\cdot\|_2$ に関しては完備ではないので，完備化をして，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を得る．$\mathcal{H}$ は可分無限次元なので $l^2$ と同型である．

$$\begin{aligned}\|AB\|_2^2 &= \tau(B^*A^*AB)\\ &\leq \|A\|^2\tau(B^*B)\\ &= \|A\|^2\|B\|_2^2\end{aligned}$$

なので，$\mathcal{M}_{2^\infty}$ における積を，$\mathcal{M}_{2^\infty}$ の $\mathcal{H}$ への作用と見なせる．これにより $\mathcal{M}_{2^\infty} \subset B(\mathcal{H})$ と思うことができるので，$\mathcal{M}_{2^\infty}$ の $B(\mathcal{H})$ における強作用素位相による閉包を取ることによって，von Neumann 環 $\mathcal{R}$ が得られる．$\mathcal{R}$ は，$\mathcal{M}_{2^\infty}$ と同じく $\mathcal{M}_{2^n}$ たちの増大和の閉包ではあるが，ノルム位相よりも弱い強作用素位相に関する閉包を取っているため，$\mathcal{M}_{2^\infty}$ よりもさらに大きな作用素環が得られている．$\mathcal{M}_{2^\infty}$ のトレース $\tau$ は自然に $\mathcal{R}$ のトレースに伸びるので，それも $\tau$ と書こう．$\mathcal{R}$ のトレースは $\tau$ のみであり，さらに $\mathcal{R}$ の中心 ($\mathcal{R}$ の元であってすべての $\mathcal{R}$ の元と交換するもの) は単位元のスカラー倍に限る．このような性質を持つ von Neumann 環は **$\mathrm{II}_1$ 型因子環**と呼ばれる (因子環は I 型・II 型・III 型などの型に分かれるがここでは深入りしない)．また，作り方から明らかに $\mathcal{R}$ は有限次元部分環によって内部から近似される．このような性質を持つ von Neumann 環は**超有限**であると言われる．まとめると，$\mathcal{R}$ は超有限 $\mathrm{II}_1$ 型因子環である．次の定理は作用素環論を創始した Murray–von Neumann による．

**定理 4.** 超有限 $\mathrm{II}_1$ 型因子環は一意的である．すなわち，任意の超有限 $\mathrm{II}_1$ 型因子環は $\mathcal{R}$ に同型である．

この定理により，$3^\infty$ 型の UHF 環に対して同様の構成を行っても (あるいは次節に出て来る Jiang–Su 環 $\mathcal{Z}$ に対して同様の構成を行っても)，得られる von Neumann 環は同型であることになる．では前節で考察した射影のトレースによる値はどうなるだろうか．実は

$$\{\tau(P) \mid P \text{ は } \mathcal{R} \text{ の射影}\} = [0,1]$$

が成り立つ (超有限でなくても $\mathrm{II}_1$ 型因子環であればいつでもこうなる)．ノルム位相による完備化である UHF 環の段階では射影が取り得る「次元」は $k/2^n$ とか $k/3^n$ というような数であったが，強作用素位相による閉包を取ると「次元」は閉区間全体をみっちり埋め尽くすのである．この状況はしばしば連続次元と呼ばれる．一口に「無限次元代数」と言っても，考える位相によってその性質が大きく変化する様子を感じ取っていただけただろうか．

## 4. Jiang–Su 環

この節では話題を改め，$C^*$ 環の分類理論において極めて重要な役割を果たす **Jiang–Su 環**という $C^*$ 環について解説したい．そのためにまず $C^*$ 環のテンソル積について簡単に述べておく．ベクトル空間のテンソル積については既知としてよいであろう．$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が $C^*$ 環のとき，$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ をベクトル空間としてのテンソル積とする．$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ の元は $a \otimes b$ $(a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B})$ という形の元の有限 1 次結合である．

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd,\ (a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$$

と定めることによって，$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ は $*$ 演算を持つ代数となる．問題はノルムである．$C^*$ 環を得るためには，$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ にノルムを入れて完備化をする必要があるが，一般には $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ を $C^*$ 環にするようなノルムの入り方は一意的ではない．ノルムが一意になるのはどのようなときか，異なるノルムを入れた場合に $C^*$ 環の性質はどのように変貌するか等，テンソル積のノルムをめぐる考察は $C^*$ 環論における興味深い話題の一つである．しかしこの小文では一意的なノルムを持つテンソル積しか現れないので，これ以上は深入りしないことにし，$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ に何らかのノルムを入れて完備化したものを $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ のテンソル積と呼ぶことにする．記号の簡略化のため，完備化したものも $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ と

書いてしまうことにしよう．

さて $p$ と $q$ を自然数とするとき，$\mathcal{M}_p \otimes \mathcal{M}_q$ は $\mathcal{M}_{pq}$ と同型であることが簡単に分かる．$\mathcal{M}_p$ および $\mathcal{M}_q$ を，$A \mapsto A \otimes I$ および $B \mapsto I \otimes B$ によって，$\mathcal{M}_p \otimes \mathcal{M}_q = \mathcal{M}_{pq}$ の部分環と見なしておく．閉区間 $[0,1]$ から $\mathcal{M}_{pq}$ への連続写像の全体を $C([0,1], \mathcal{M}_{pq})$ と書く．$C([0,1], \mathcal{M}_{pq})$ は各点ごとの演算と

$$\|f\| = \max_{t \in [0,1]} \|f(t)\|$$

により，$C^*$ 環となることが分かる．そこで $C([0,1], \mathcal{M}_{pq})$ の部分環 $I(p,q)$ を

$$I(p,q) = \{f \mid f(0) \in \mathcal{M}_p,\ f(1) \in \mathcal{M}_q\}$$

で定義する．つまり，開区間 $(0,1)$ 上では $f(t)$ は $pq$ 次の行列に値を持つが，区間の両端では $p$ 次あるいは $q$ 次の行列でなくてはならないとの制約を受ける．区間の両端では「次元」が落ちることから，$I(p,q)$ は dimension drop $C^*$-algebra と呼ばれる．$f$ を $I(p,q)$ の射影としよう．各点 $t$ ごとに $f(t)$ は $\mathcal{M}_{pq}$ の射影である．$\mathcal{M}_{pq}$ の射影がトレース $\mathrm{tr}_{pq}$ によって取り得る値は離散的であった（2 節参照）から，$f$ とトレースの連続性より，ある整数 $k$ が存在して任意の $t \in [0,1]$ に対して $\mathrm{tr}_{pq}(f(t)) = k/pq$ となる．ところが両端では制約があるから，整数 $k_0, k_1$ が存在して $\mathrm{tr}_{pq}(f(0)) = k_0/p$, $\mathrm{tr}_{pq}(f(1)) = k_1/q$ となる．このことから特に，$p$ と $q$ が互いに素であれば，$I(p,q)$ は 0 と単位元以外の射影を持たないことが分かる．1999 年に Jiang–Su は，このような $I(p,q)$ たちの帰納的極限 $C^*$ 環として，今日 Jiang–Su 環と呼ばれる $C^*$ 環 $\mathcal{Z}$ を構成した．

**定理 5.** $\mathcal{Z}$ は次の性質を持つ．

**(1)** $\mathcal{Z}$ は単位元を持つ単純な無限次元 $C^*$ 環で，ただ 1 つのトレースを持つ．

**(2)** $\mathcal{Z}$ は 0 と 1 以外の射影を持たない．

**(3)** 多くの単純な無限次元 $C^*$ 環 $\mathcal{A}$ に対して $\mathcal{A} \otimes \mathcal{Z} \cong \mathcal{A}$ が成り立つ．

(2) の性質は，$I(p,q)$ が自明でない射影を持たないことからの帰結であり，2 節，3 節で考察した UHF 環や von Neumann 環が豊富に射影を含んでいたのとは対照的である．特に（当然ながら）射影のトレースによる値は $\{0,1\}$ にしかならない．(3) は曖昧な主張であるが，厳密に述べるには紙数が足りないのでご容赦いただきたい．「多くの単純な無限次元 $C^*$ 環 $\mathcal{A}$」には，2 節に出てきた UHF 環や Jiang–Su 環自身などが含まれている．$\mathcal{Z}$ は無限次元であるから，それと $\mathcal{A}$ とのテンソル積 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{Z}$ は，素朴に考えると元の $\mathcal{A}$ よりもずいぶん大きなものになったかのような印象を受けるが，驚くべきことに，実は $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A} \otimes \mathcal{Z}$ は $C^*$ 環として同型であると (3) は主張している．無限かける無限はまた無限なので，何かに矛盾しているわけでは全くないが，不思議な印象を与えるのは確かである．1 次元 $C^*$ 環 $\mathbb{C}$ は，有限次元であるという点を除けば，上の定理の条件をすべて満たすことにも注意しておこう．$\mathcal{Z}$ は無限次元でありながら 1 次元 $C^*$ 環 $\mathbb{C}$ のような振舞いを見せるのである．

## 5. $C^*$ 環の分類理論

最後に，**$K$ 理論**を用いた $C^*$ 環の分類理論について触れておきたい．数学のどの分野でも，研究対象（例えば群とか多様体とか，今の場合なら $C^*$ 環や von Neumann 環）をすべてリストアップしてそれぞれに名前やラベルを与えて整理したいというのは自然な欲求であり，それに答えるのが分類理論である．ところが作用素環論が扱うのは無限次元の代物であるため，対象のすべてを見通すのは現実的には不可能である．そこで，性質の良い何らかのクラスに限定した上で，名前やラベルを与えて整理するという方向で研究が進められている．例えば，1982 年にフィールズ賞を受賞した Connes の主要な業績の一つは，3 節で紹介した超有限因子環（という性質の良い von Neumann 環のクラス）の分類理論である．他方，$C^*$ 環の分類理論の場合，分類のための「ラベル」として用いられるのが $K$ 群である．具体的には，

$C^*$ 環 $\mathcal{A}$ に対して，$K_0(\mathcal{A}), K_1(\mathcal{A})$ という2つのアーベル群が定義される．$K_0$ 群や $K_1$ 群の定義を述べる余裕はないが，不正確を承知でごく簡単に言うと，$\mathcal{A}$ の射影全体をホモトピーで割ったものが $K_0(\mathcal{A})$ であり，$\mathcal{A}$ のユニタリー全体（一般に $UU^* = U^*U = I$ を満たす $U$ を**ユニタリー**と呼ぶ）をホモトピーで割ったものが $K_1(\mathcal{A})$ である．$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が同型ならば，アーベル群として $K_0(\mathcal{A}) \cong K_0(\mathcal{B}), K_1(\mathcal{A}) \cong K_1(\mathcal{B})$ である（このようなとき $K_0$ 群や $K_1$ 群は $C^*$ 環の同型不変量であると言う）．本稿で出てきた $C^*$ 環の $K$ 群を列挙すると次のようになる：

$$K_0(\mathcal{M}_{2^\infty}) \cong \{k/2^n \mid k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\},$$
$$K_1(\mathcal{M}_{2^\infty}) = 0,$$
$$K_0(\mathcal{R}) \cong \mathbb{R}, \quad K_1(\mathcal{R}) = 0,$$
$$K_0(\mathcal{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad K_1(\mathcal{Z}) = 0.$$

これを見ると，トレースによる射影の値と $K_0$ 群との間に関係があるのが分かる．一般にトレース $\tau$ は $K_0$ 群から $\mathbb{R}$ への準同型 $\tau_*$ を導く．上に挙げた例では偶然にも $K_0(\mathcal{A}) \cong \tau_*(K_0(\mathcal{A}))$ が成り立っているのである．この3つの例では $K_1$ 群はすべて0だが，もちろん一般にはそうではない（von Neumann 環の $K_1$ 群は常に0である）．

さて，$C^*$ 環の分類理論を構築するには $K_0$ 群と $K_1$ 群だけではデータとして不十分であり，$K_0$ 群の上に定まる自然な順序構造などが必要とされる．しかしそれを詳しく述べてもあまり意味がないので，そのような情報をすべて含めたものを荒っぽく $K$ 理論的データと呼んでしまおう．分類理論は，$C^*$ 環の何らかのクラス $C$ に対して，「$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in C$ が同一の $K$ 理論的データを持てば，$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ である」という命題を証明することによってなされる．もちろんクラス $C$ は大きければ大きいほど良い．トレースを持つような $C^*$ 環に対する分類定理として，現在知られている最も強いものは次の定理である（Winter, Lin-Niu）．

**定理 6.** 次の条件を満たす $C^*$ 環 $\mathcal{A}$ の全体を $C$ とする．

**(1)** $\mathcal{A}$ は単位元を持ち，可分・単純・核型で，さらに普遍係数定理を満たす．

**(2)** $\mathcal{A} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{Z}$ が成り立つ．

**(3)** 任意の UHF 環 $\mathcal{M}_{p^\infty}$ に対して，$\mathcal{A} \otimes \mathcal{M}_{p^\infty}$ は traical rank zero を持つ．

このとき，$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in C$ が同一の $K$ 理論的データを持てば，$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ である

本稿では定義していない（専門家以外は理解不能な）用語が定理の文中に頻出しているが，いちいち説明しない．(2) の条件に注目して欲しい．これは定理5の (3) の条件と同じである．$\mathcal{Z}$ をテンソルしても変化しないという性質を「良い性質」として捉え，それを，分類可能なクラス $C$ の定義の一つに入れているのである．かなり専門的な話題になってしまったが，$K$ 理論を用いた $C^*$ 環の分類理論の雰囲気を味わっていただければ幸いである．作用素環論の包括的なテキストとして以下の2つを挙げて，終わりとしたい．

### 参考文献

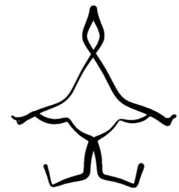

1) 生西明夫・中神祥臣：『作用素環入門 I・II』，岩波書店 (2007).
2) M. Takesaki: “Theory of operator algebras I, II, III”, Springer–Verlag (2003).


（まつい・ひろき，千葉大学大学院理学研究科）

特集／無限次元の魅力

# 無限次元システム

## 身近にある無限次元システム



岩井 敏洋

### 1. はじめに

無限次元システムは意外に身近なところにある．というより，日常的には物理現象を記述するシステム（系）は無限次元である．例えば，音の伝播を考えてみる．簡単のために，糸電話を想像して，空間は１次元だとする．縦波モデルを仮定して，糸の各点で糸に沿っての小さな変位を考える．糸を数直線と見なして，各点 $x$ でのある時刻 $t$ における変位を $u(t,x)$ で表すとき，$t$ を固定して，糸の長さ $l$ にわたっての $u(t,x), 0 \leq x \leq l$ のあり様 $\{(x, u(t,x)) | 0 \leq x \leq l\}$ は（$u(t,x)$ が小さいという限定つきだが）無限のバラエティがある．適当な境界条件と初期条件が与えられたとき，物理法則に従って，物理現象としての $u(t,x)$ が定まる．以下で具体例を扱う．

### 2. 無限次元力学系

いま，糸電話でなく，管の中の空気の振動（笛）を考える．例えば，管の一端（$x=0$）を固定端，他端（$x=l$）を開放端とする．起こるべき空気の振動は，境界条件 $u(t,0) = u_x(t,l) = 0$ をみたさなければならない．一般に，このような関数は適当な仮定の下に

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) e_n(x) \qquad (1)$$

の形に**フーリエ展開**される．ただし，

$$e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega x, \quad \omega = \frac{\pi}{l}$$

は区間 $[0,l]$ における正規直交関数系である．

$$\int_0^l e_n(x) e_m(x) dx = \delta_{nm}. \qquad (2)$$

このとき，$u(t,x)$ に適当な滑らかさがあって，(1) の級数が項別微分可能だとすると，音波の従うべき**波動方程式** $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ から，

$$\frac{d^2 A_n}{dt^2} + c^2\omega^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 A_n = 0$$

という，無限個の変数 $A_n, n = 0, 1, \cdots$ に関する微分方程式（力学系）が得られる．

各自由度が担うエネルギーは

$$H_n = \frac{1}{2}\left(\frac{dA_n}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}c^2\omega^2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 A_n^2$$

であり，系全体のエネルギーはそれらの総和となる．ここで，(2) に加えて，

$$\int_0^l e_n'(x) e_m'(x) dx = \omega^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \delta_{nm}$$

の成り立つことを用いると，全エネルギーの表示

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) dx \qquad (3) \end{aligned}$$

を得る．

ここで取り扱った笛の力学系は次のような意味で無限次元**ハミルトン力学系**である．$v = u_t$ で速度関数を定義し，(3) に鑑みて，ハミルトニアンを

$$H = \frac{1}{2}\int_0^l (v^2 + c^2 u_x^2)dx \qquad (4)$$

で定義する．ここで，積分

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_0^l v u_t dx - H \right) dt$$

に対して，境界条件 $u(t,0) = u_x(t,l) = 0$ をみたす関数のクラスの中で変分をとって，時間境界条件 $\delta u|_{t=t_1} = \delta u|_{t=t_2} = 0$ の下に変分原理を適用すると，次のハミルトン方程式を得る．

$$u_t = v, \quad v_t = c^2 u_{xx}.$$

これは波動方程式 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ に等価である．

## 3. 無限次元制御系

波動方程式に対する制御問題は電気工学の分野にある．エネルギー損失のない**伝送線路**の微分方程式が

$$LI_t + V_x = 0, \quad CV_t + I_x = 0 \qquad (5)$$

で与えられることはよく知られている．ただし，$I, V$ は各々伝送線路の電流と電圧であり，$L, C$ は各々分布インダクタンス，キャパシタンスである．すぐに分かるように，$I, V$ はどちらも波動方程式をみたす．ただし，$c^2 = 1/LC$．

いま，伝送線路の長さは $l$ であるとし，伝送線路の電荷を $Q$ とおき，$Q_t = I$ に共役な運動量を $\Pi = LQ_t$ で導入する．このときの伝送線路のエネルギーは次式で与えられる．

$$H = \frac{1}{2}\int_0^l \left( \frac{1}{L}\Pi^2 + \frac{1}{C}Q_x^2 \right) dx. \qquad (6)$$

線路の両端の電圧を $e_0, e_l$ とおき，これらが**制御変数**であると考える．線路の両端での相互作用エネルギーを $H_0 = -Q^0 e_0, H_l = Q^l e_l$ とおく．ただし，$Q^0 = Q|_{x=0}, Q^l = Q|_{x=l}$．ここで，積分

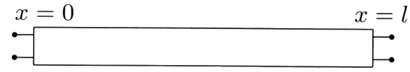


図1 伝送線路．

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_0^l \Pi Q_t dx - (H + H_0 + H_l) \right) dt$$

に対し，$\delta Q|_{t=t_1} = \delta Q|_{t=t_2} = 0$ の下に変分原理を適用すると，

$$Q_t = \frac{1}{L}\Pi, \quad \Pi_t = \frac{1}{C}Q_{xx} \qquad (7)$$

$$e_0 = \frac{1}{C}Q_x|_{x=0}, \quad e_l = -\frac{1}{C}Q_x|_{x=0} \qquad (8)$$

を得る．この形の変分法は文献1) による．$I = Q_t$, $V = -Q_x/C$ に注意すれば，(7) は (5) に等価であることが分かる．そして，内部エネルギー $H$ の増加が両端点からのエネルギーの入出差に等しいという意味でこの系は受動的である．実際，(6) を $t$ で微分して，(7) を用いると，

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{LC}\Pi Q_x \Big|_{x=0}^{x=l} = -\left[IV\right]_{x=0}^{x=l}$$

を得る．一般の無限次元系の制御問題の厳密な取扱いは，例えば文献2) に詳しい．

## 4. 無限次元最適化

何らかの関数あるいは汎関数を最大化（または最小化）するというのは科学技術の基本の考え方である．ここでは，最大化あるいは最小化問題を大雑把に最適化問題と考える．最適化問題のうち，最もよく利用されるのが**線形計画問題**である．$\mathbf{R}^n$ の中の，いくつかの線形制約条件から決まる凸多面体において，$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}$ の最大化（または最小化）をはかるというのがその最も基本的な問題の形である．ただし，$\boldsymbol{c}$ は定数ベクトルである．線形空間の実現の仕方は $\mathbf{R}^n$ 以外にも色々あるので，それに応じて色々な形の線形計画問題が可能である．

いま，$\mathbf{R}^n$ の中に $r$ 個の点 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ があって（$\mathbf{R}^n$ がデータの空間で，$\boldsymbol{x}_j, j = 1, \cdots, r$ は測定されたサンプルと見なす），これらの点の各々からの距離の 2 乗の和が最小となるような $m$ 次元

$(m < n)$ 線形部分空間 $V_m$ を求めるという問題を考える．$V_m$ の正規直交系を $\boldsymbol{e}_k, k=1,\cdots,m$ とすると，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ の $V_m$ への射影は，$Q\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^m \boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{x})$ と書ける．$Q$ を用いると，各 $\boldsymbol{x}_j$ から $V_m$ への距離の 2 乗の総和は

$$\sum_{j=1}^r \|\boldsymbol{x}_j - Q\boldsymbol{x}_j\|^2 = \mathrm{tr}\,(PC), \quad P = I - Q$$

となる．ここに，$C$ はサンプルのなす $n \times r$ 行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r)$ に対し，$C = XX^T$（$X^T$ は $X$ の転置）で与えられる．$P$ は射影作用素で，

$$P^2 = P, \quad P^T = P, \quad \mathrm{tr}(P) = n - m \quad (9)$$

をみたす．こうして，$n \times n$ 実行列のなす線形空間 $\mathbf{R}^{n \times n}$ の中で，(9) で決まるグラスマン多様体の上で，$\mathrm{tr}(PC)$ を最小化するという問題に到達した[3,4]．これは一つの線形計画問題である．

この線形計画問題は容易に無限次元空間に拡張することができる．可分ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ をとる．$\mathcal{H}$ には完全正規直交系 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ が存在する．いま，点列 $\varphi_j \in \mathcal{H}$ が与えられたとして，各 $\varphi_j$ からの距離の 2 乗の総和が最小となるような $m$ 次元の部分空間 $V_m$ を求めるという問題を考える．ここで，$e_k, k=1,\cdots,m$ が $V_m$ の基底をなすように完全正規直交系をとる．$\psi$ の $V_m$ への射影は $Q\psi = \sum_{k=1}^m e_k\langle e_k, \psi\rangle$（$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathcal{H}$ の内積）と表すことができるので，有限次元系の場合と同様に，各 $\varphi_j$ から $V_m$ への距離の 2 乗の総和は

$$\sum_j \|\varphi_j - Q\varphi_j\|^2 = \mathrm{tr}(PC), \quad P = I - Q$$

で与えられる．ただし，$C = \sum_j \varphi_j \varphi_j^*$ で，$\varphi_i^*$ は $\varphi_i$ の定める線形汎関数である．もちろん，$C$ はトレースクラスであることが要求される[5)]．

線形計画問題はうんと一般化されて，ベクトル空間 $V$ に双線形写像 $V \times V \to V$ が定義されていて，ジョルダン代数の構造をもつものにおいて，適当な拘束条件の下で，線形関数の最大化をはかる問題として定式化されている．もちろん，$V$ は無限次元ヒルベルト空間でよい[6,7)]．

## 5. あとがき

一般に，波動方程式，シュレーディンガー方程式等は無限次元ハミルトン力学系のハミルトン方程式として記述できる．そのためには，適当なヒルベルト空間にシンプレクティック構造を定義して，系の全エネルギーを表す積分をハミルトニアンに選んで，ヒルベルト空間の中で，ハミルトンベクトル場を求めるという手続きをとることになる[8)]．

2 節での指導原理はフーリエ展開であった．これとは別に，変換群をもとに有限次元から無限次元に移行するという考え方がある．自由剛体のオイラー方程式と非圧縮性完全流体のオイラー方程式が，有限次元と無限次元の違いはあっても数学的な表現形式は同じ（オイラー・ポアンカレ方程式[8)]）であると見抜いたのは Arnold の慧眼であり[9)]，無限次元力学系研究に道を拓いた[10)]．

### 参考文献


1) D. Jeltsema and A.J. van der Schaft, *Rep. Math. Phys.*, vol.**63** (2009), 55–74.
2) A. Bensoussan, G. Da Prato, M.C. Delfour, and S.K. Mitter, *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems*, 2nd ed., Birkhäuser, Boston, 2007.
3) C.I. Byrnes and J.C. Willems, *IMA J. Math. Control Info.*, vol.**3** (1986), 103–118.
4) A. Bloch, *Systems Control Lett.* vol.**6** (1985), 103–108.
5) A.M. Bloch, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol.**302** (1987), 787–796.
6) L. Faybusovich, *J. Comp. Appl. Math.*, vol.**86** (1997), 149–175.
7) L. Faybusovich and T. Tsuchiya, *Math. Program., Ser. B***97** (2003), 471–493.
8) J.E. Marsden and T.S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer-Verlag, New York, 1994.
9) V.I. Arnold, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, vol.**16** (1966), 319–361.
10) J. Marsden, *Application of Global Analysis in Mathematical Physics* Publish or Perish, Inc., Boston, 1974.


（いわい・としひろ，京都大学大学院情報学研究科）

特集／無限次元の魅力

# 無限次元量子コンピュータ

今井　浩

## 1. ‘デジタル’ vs. ‘アナログ’ コンピュータ

デジタルコンピュータは，情報を0と1の組合せで表現して，膨大な計算を安定かつ正確に行うことができる．その成功を目の当たりにすると，コンピュータ内部では情報が物理状態で表現されている原点を忘れてしまうくらいだ．が，その原点に立ち返り，物理学最先端実験で扱えるようになってきた量子力学状態を使ったコンピュータを考えると，革新的コンピュータとして**量子コンピュータ**の研究開発の新世界が広がる．

情報の物理実体化に立ち返ると，かつて注目を浴びた任意実数上で厳密に計算ができるアナログコンピュータを思い出す．任意の2実数 $x$ と $y \neq 0$ に対し，$x+y$, $x-y$, $xy$, $x/y$, ガウス記号 $[x]$ を正確に単位時間で計算できる仮想的アナログコンピュータは，現実的計算困難性を解明する **P vs. NP 問題**[1] を解決する（ガウス記号が強力であるためで，それなしではアナログ版 P vs. NP 問題が研究されている）が，現実にはアナログコンピュータはその情報表現や操作の上で不可避なエラー等の問題から廃れている．

であるとすれば，量子力学に従う光なり電子なり超伝導系なりで情報を表現する量子コンピュータは強力な新世代アナログコンピュータなのだろうか？

## 2. デジタル量子コンピュータ

量子状態を用いた計算を最初に構想した Feynman らは，量子コンピュータによってこそ量子力学計算が高速に行えるというアナログ面ももつ将来を描いていた（これはデジタル量子計算の枠組みで量子力学シミュレーションという1分野をなしている）．量子計算では，Hilbert 空間におけるノルム1の波動関数によって状態を表し，その時間発展を離散時間で行い，最後に測定して出力結果を得る．これだけでは，無限次元空間で作用素等を用いる世界を土台としたアナログ面が前面に出ているが，有限次元でアナログ量子計算するだけでは理論展開が限られ，かつ実現性でも劣る．

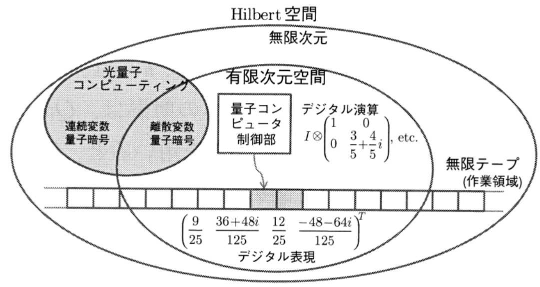



図1　無限次元系 vs. 有限次元系量子計算.

今のデジタル量子コンピュータは，無限次元空間の中で有限離散な計算を行うもので，その大まかな説明は次の通り．0か1かを表す方式は1bitの情報量を有するのに対応して，デジタル量子コンピュータでは内積の定義された2次元複素ベクトル空間の正規直交基底を $|0\rangle, |1\rangle$ によってそれぞれ0と1を表すとし，一般のノルム1の2次元ベクトルを**1量子ビット**とする．1量子ビットの状態 $n$ 個の合成系は，数理的にはそれらのテンソル積で表され，$2^n$ 次元のノルム1のベクトルとなる．

量子計算は，初期状態のベクトルに対して，測定によって所望の結果が得られる状態へとユニタリ変換するプロセスに対応する．実際には，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

といった定数個の $2 \times 2$ 複素ユニタリ行列で実部・虚部が定数の有理数となるものの集合を定め，その集合のうちの1つの行列と $n-1$ 個の $2 \times 2$ 単位行列を様々な順でテンソル積して得られる $2^n$ 次の行列全体を考え，その $2^n$ 次元行列の乗算を行うことを単位演算として，その乗算を行う回数を量子計算時間と定める．これが**デジタル量子計算**だ（図1）．これでは任意のユニタリ変換が実現できないが，任意のものを必要な精度で効率よく近似できることが示されており，これによってデジタル化を実現している．理論では，離散時間発展の時間が $T$ のとき，その行列近似が適当なノルムの下 $O(\log T)$ の精度でできるという**近似定理**を示していくのだ．

量子コンピュータ実現において，量子状態を操作する際のエラー，量子状態が環境系と作用して起こるデ

コヒーレンスエラー等のエラーと直面しなければならず，この近似定理に基づくデジタル世界でさらに誤り訂正やフォールトトレランスを考えていくことになる．このデジタル量子コンピュータを用いると，今のコンピュータでは高速に解く方法がいまだ知られていない整数の素因数分解が，高速に解けることを Shor が示した．Shor はコンピュータサイエンスの研究者で，彼の原論文をさらに追記とともにまとめたレビュー[4]では，このエラーに関する諸問題周辺とそれらを解決に導く方向等，量子コンピュータ研究を黎明期から発展期に至らせた時代の息吹きを感じさせる見識ある解説がされており，一読の価値がある．

## 3. 無限次元系へ

ここまでほぼデジタル vs. アナログの話に費やしてきたが，いよいよ本題の無限次元系に向けた展開をいくつか挙げてみようと思う．

### 3.1 1 量子ビットから多次元系へ

1 量子ビットの世界からひと飛びに無限次元系にいけるわけではない．最近の量子コンピュータ実現研究では，種々のパラメタを実験で操作できる超伝導量子ビット系で，これまでは 1 量子ビットを実現し，その上で操作していたところを，操作は難しくなるがこの量子状態の多次元系の表現を活用して物理的に 1 量子ビット系を $n$ 個合成するのでなく，多次元系を 1 部分システムで実現する実験も行われている．このように多次元系の活用が量子計算実験で開始されている．

### 3.2 実数計算 NP 完全の拡張

実数計算を単位操作とするモデルの P vs. NP 問題を，無限次元量子状態の上での計算モデルへ拡張するのは自然である．Feynman の思い描いた量子状態に関する様々なシミュレーションを連続系量子コンピュータで実現するテーマへの展開が期待できる一方，実数アナログ量子計算で計算効率が真に上がるかという難問が立ちふさがる．

### 3.3 光量子コンピューティング

物理実現の観点では，光は本質的に無次元系の量子状態である．理想的レーザ光はコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ として表され，それは光子数状態 $|n\rangle$ と複素数 $\alpha$ を用いると $|\alpha\rangle = \exp\left(-|\alpha|^2/2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$ となる．

これまでの光量子コンピュータ開発研究では，デジタル量子モデルに従って実現を目指す研究が多い．一方で，連続変数の無限次元量子状態を使った量子計算さらには量子通信そして連続変数量子テレポテーションそして**連続変数量子暗号**なども広く研究されている．そこで無限次元系での計算量の理論がキーとなる．たとえば，スクイーズド状態を用いる連続変数量子暗号では，無限次元空間の中に埋め込まれた有限次元空間上での量子誤り訂正符号を用いて，安全性解析がなされている[2]．コヒーレント状態を用いる連続変数量子暗号の安全性解析においては，有限次元系で成立する定理を無限次元系で証明することがキーとなる場合もある[3]．

### 3.4 無限次元量子コンピュータ

量子コンピュータの理論モデルである量子チューリングマシンでは，テープは無限次元系量子状態系であるが，計算は有限次元の中で，かつシュレディンガー方程式を解く連続時間発展ではなく離散時間発展が行われ，またユニタリ変換も実部・虚部が有理数の複素数でデジタル化されている．ここまでデジタル化された世界で無限次元の量子状態を考えたとき，第一の課題となるのが入力データの情報量の評価で（デジタル版では $n$ 量子ビットと明快），そこは物理的考察で解決できたとしても，次の課題として近似定理について調べることが出てくる．デジタル版でのエラー対処問題への理解を深めるためにも，本質的事項として無限次元系についての考察を深める必要がある．

実数計算のデジタル vs. アナログの枠を超えた無限次元系における問題解明が期待される．

### 参考文献


1) S. Cook: The P versus NP Problem. `http://www.claymath.org/millennium/P_vs_NP/`
2) D. Gottesman and J. Preskill: Secure Quantum Key Distribution Using Squeezed States. *Physical Review A*, Vol.**63**, 022309 (2001), 18pp.
3) R. Renner and J.I. Cirac: de Finetti Representation Theorem for Infinite-Dimensional Quantum Systems and Applications to Quantum Cryptography. *Physical Review Letters*, Vol.**102**, 110504 (2009), 4pp.
4) P. Shor: Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. *SIAM Review*, Vol.**41**, No.2 (1999), pp.303–332.



（いまい・ひろし，東京大学大学院情報理工学系研究科）

# 無限次元対称性

脇本　実

無限次元リー環は数学・物理学の多くの分野と関連していて非常に重要なそして興味のある研究対象である．ここではその１つの例として，可積分系に関連する話を紹介しようと思う．

今は昔のことであるが，可積分系の研究の扉を開いたのは **KdV 方程式**であった．KdV 方程式は**ヴィラソロ（Virasoro）代数**と深く関係している．よく知られているようにヴィラソロ代数は $L_n$ $(n \in \mathbf{Z})$ と $c$ の張るベクトル空間に次のブラケット積を入れて得られるリー環である．

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}c\,\delta_{m+n,0},$$
$$[L_m, c] = 0.$$

$L_n$ たちの母関数 $L(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} L_n z^{-n-2}$ を用いると，このブラケット積は次のように書ける：

$$[L(z), L(w)] = \big(\iota_{z,w} - \iota_{w,z}\big) \times \left(\frac{\partial L(w)}{z-w} + \frac{2L(w)}{(z-w)^2} + \frac{c/2}{(z-w)^4}\right). \quad (1)$$

ここで $\iota_{z,w}$ は $|z| > |w|$ におけるテイラー展開を意味する．すなわち，

$$\iota_{z,w}\left(\frac{1}{z-w}\right) = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^n,$$
$$\iota_{w,z}\left(\frac{1}{z-w}\right) = \frac{-1}{w}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^n$$

である．$(\iota_{z,w} - \iota_{w,z})\left(\frac{1}{(z-w)^{n+1}}\right)$ は定義域の隣接する正則関数の差であり，従ってデルタ関数（の $n$ 階微分）である．このデルタ関数を $\frac{\lambda^n}{n!}$ と略記して，上の (1) を

$$[L_\lambda L] = \partial L + \lambda\cdot 2L + \lambda^3\cdot\frac{c}{12} \quad (2)$$

と書こう．この記法はカッツ（Kac）による発明で，**λ（ラムダ）ブラケット**と呼ばれている．詳しく云うと，リー環の元を係数とする形式的無限級数 $a(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_{(n)}z^{-n-1}$ と $b(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} b_{(n)}z^{-n-1}$ について，それらのブラケット積 $[a(z), b(w)]$ が

$$[a(z), b(w)] = \sum_{n=0}^{N}(\iota_{z,w} - \iota_{w,z})\frac{c^{[n]}(w)}{(z-w)^{n+1}} \quad (3a)$$

という形のときに

$$[a_\lambda b] = \sum_{n=0}^{N}\frac{\lambda^n}{n!}c^{[n]} \quad (3b)$$

と書く．(3a) は**頂点代数**（vertex algebra）における作用素積であり，(3b) はそれの代数的な記述法である．この記法を用いることによって，作用素積の計算は $\lambda$ の多項式の計算に置き換えられる．$\lambda$ ブラケットの計算は次の基本公式に従う．

**(C0)** $[\ {}_\lambda\ ]$ は $\mathbf{C}$-双線型．

**(C1)** $[\partial a_\lambda b] = -\lambda[a_\lambda b]$,
$[a_\lambda \partial b] = (\partial + \lambda)[a_\lambda b]$.

**(C2)** $[b_\lambda a] = -_{\leftarrow}[a_{-\partial-\lambda} b]$.

**(C3)** $[a_\lambda[b_\mu c]] - [b_\mu[a_\lambda c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]$.

頂点代数における積は正規積であり，結合律を満たさず，可換でもない．正規積の作用素積を計算す

るときに重要なヴィック定理は $\lambda$ ブラケットの言葉では次のように簡単な式で与えられる（Kac）：

**(C4)** $[a_\lambda :bc:] =:[a_\lambda b]c: + :b[a_\lambda c]: + :\int_0^\lambda [[a_\lambda b]_\mu c]d\mu :.$

## 1. ポアソン頂点代数とハミルトニアン対

**ポアソン頂点代数**は，頂点代数における正規積を（通常の）結合的で可換な積で置き換えた代数系であり，次のように定義される．

$V$ は可換な結合代数で，かつ $\mathbf{C}[\partial]$ 加群であるとする．$V$ の任意の2元 $P, Q$ に対して，$V$ の元を係数とする $\lambda$ の多項式 $\{P_\lambda Q\}$ が対応していて，次の条件を満たすとき，$V$ をポアソン頂点代数（Poisson vertex algebra, PVA）と言う．

**(P0)** $\{\ _\lambda\ \}$ は $\mathbf{C}$-双線型.

**(P1)** $\{\partial P_\lambda Q\} = -\lambda\{P_\lambda Q\}$,
$\{P_\lambda \partial Q\} = (\partial+\lambda)\{P_\lambda Q\}$.

**(P2)** $\{Q_\lambda P\} = -{}_{\leftarrow}\{P_{-\partial-\lambda} Q\}$.

**(P3)** $\{P_\lambda\{Q_\mu R\}\} - \{Q_\mu\{P_\lambda R\}\} = \{\{P_\lambda Q\}_{\lambda+\mu} R\}$.

**(P4)** $\{P_\lambda QR\} = \{P_\lambda Q\}R + Q\{P_\lambda R\}$.

頂点代数のヴィック定理 (C4) は，ポアソン頂点代数においてはライプニッツ則 (P4) で置き換えられるのである．

ここで，（すでに条件 (C2) においてもそうであるが），(P2) における ${}_{\leftarrow}\{P_{-\partial-\lambda}Q\}$ は "$-\partial-\lambda$ を左端に置く" という意味の記号である．$\{P_\lambda Q\}$ は $\lambda$ の多項式であるから

$$\{P_\lambda Q\} = \sum_{k:\text{有限和}} a_k\lambda^k, \quad (a_k \in V) \tag{4a}$$

という形に書けるが，${}_{\leftarrow}\{P_\lambda Q\}$ はこの表示で "$\lambda$ を左端に置くべし" という指示

$$_{\leftarrow}\{P_\lambda Q\} = \sum_{k:\text{有限和}} \lambda^k a_k \tag{4b}$$

であり，${}_{\leftarrow}\{P_{-\partial-\lambda}Q\}$ は (4b) において，$\lambda$ を $-\partial-\lambda$ で置き換えよという指示である．すなわち

$$_{\leftarrow}\{P_{-\partial-\lambda}Q\} = \sum_{k:\text{有限和}} (-1)^k(\partial+\lambda)^k a_k \tag{4c}$$

であり，微分作用素 $\partial$ は $a_k$ を微分することになる．(4a) と (4b) の右辺は同じもので差異はないけれど，$\lambda$ に微分作用素を代入するときに，この記号の必要性が生じる．これと同様に $\{P_\lambda Q\}_{\to}$, $\{P_\partial Q\}_{\to}$, $\{P_{\partial+\lambda}Q\}_{\to}$ なども定義される．

$V$ の元がすべて $u_1, \cdots, u_n$ とそれらの微分 $u_i^{(p)} := \partial^p u_i$ の関数である場合を考えよう：

$$V = \left\{ P \ ;\ \begin{array}{l} P \text{ は } u_i^{(p)}\ (i=1,\cdots,n; p\in\mathbf{Z}_{\geq 0}) \\ \text{の関数で } p \text{ が十分大きければ} \\ \dfrac{\partial P}{\partial u_i^{(p)}} = 0 \end{array} \right\}. \tag{5}$$

$u_i$ それ自身も $V$ の元とみることができ，$V$ の $\lambda$ ブラケットは $\{u_{i\lambda}u_j\}$ から次の公式により定まる：

$$\{P_\lambda Q\} = \sum_{i,j=1}^n \sum_{p,q\in\mathbf{Z}_{\geq 0}} (-1)^p \frac{\partial Q}{\partial u_j^{(q)}} \times (\partial+\lambda)^q \{u_{i\,\partial+\lambda} u_j\}_{\to} (\partial+\lambda)^p \frac{\partial P}{\partial u_i^{(p)}}. \tag{6}$$

(5) の $V$ を "$n$ 個の元 $u_1, \cdots, u_n$ で生成された微分関数環" と呼ぶ．$V$ の任意の2元 $P, Q$ について

$$\{P, Q\} := \{P_\lambda Q\}|_{\lambda=0}$$

とおくと，このブラケットは通常のポアソン・ブラケットの公理を満たす．また，

$$H_{j,i} := \{u_{i\,\partial} u_j\}_{\to} = \{u_{i\lambda}u_j\}_{\to}|_{\lambda=\partial}$$

を行列成分とする行列

$$H := \begin{pmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{pmatrix}$$

をハミルトニアンと呼び，

$$\frac{\delta P}{\delta u_i} := \sum_{j=0}^\infty (-1)^j \partial^j \left( \frac{\partial P}{\partial u_i^{(j)}} \right)$$

を $u_i$ による変分的微分と言う．これらを使うと，ポアソン・ブラケットは $\mathrm{Im}\partial$ の元をモジュロにして次のように書くことができる．

$$\{P,\, Q\} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta Q}{\delta u_j} H_{j,i} \frac{\delta P}{\delta u_i} \quad \mathrm{mod}\ \mathrm{Im}\partial$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\delta Q}{\delta u_1} & \cdots & \frac{\delta Q}{\delta u_n} \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} \frac{\delta P}{\delta u_1} \\ \vdots \\ \frac{\delta P}{\delta u_n} \end{pmatrix}$$

可積分系を考察するためには，2 個のポアソン $\lambda$ ブラケットからなる対が重要である．

**定義**　2 個のポアソン $\lambda$ ブラケット $\{\ _\lambda\ \}_H$ と $\{\ _\lambda\ \}_K$ は，それらの和 $\{\ _\lambda\ \}_H + \{\ _\lambda\ \}_K$ もまたポアソン $\lambda$ ブラケットであるときに，ハミルトニアン対（bi-Hamiltonian pair）と言う．

**定理** (Kac)　$\{\ _\lambda\ \}_K, \{\ _\lambda\ \}_H$ をハミルトニアン対とし，

$$\{h_{0\lambda} u_i\}_K|_{\lambda=0} = 0, \tag{7a}$$
$$\{h_{1\lambda} u_i\}_K|_{\lambda=0} = \{h_{0\lambda} u_i\}_H|_{\lambda=0} \tag{7b}$$

をすべての $i = 1, \cdots, n$ について満たす $V$ の 2 元 $h_0, h_1$ ($\neq 0$) が存在すると仮定する．このとき

**1)**　$h_0, h_1$ は次の関係を満たす列 $\{h_j\}_{j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$ に拡張できる．

$$\{h_{j+1\lambda} u_i\}_K|_{\lambda=0} = \{h_{j\lambda} u_i\}_H|_{\lambda=0} \quad ({}^\forall i, {}^\forall j). \tag{8}$$

**2)**　この $h_j$ たちは $\{\ ,\ \}_K, \{\ ,\ \}_H$ のいずれのポアソン・ブラケットに関しても可換である．すなわち，すべての $j, k$ について次の式が成り立つ：

$$\{h_j,\, h_k\}_K \equiv \{h_j,\, h_k\}_H \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \mathrm{Im}\partial. \tag{9}$$

□

関係式 (7a) と (8) を**レナード・スキーム**と呼ぶ．$h_j$ が存在するとき

$$\xi_j := \begin{pmatrix} \frac{\delta h_j}{\delta u_1} \\ \vdots \\ \frac{\delta h_j}{\delta u_n} \end{pmatrix}$$

とおくと，(7a) と (8) は $\xi_j$ の言葉では次のようになる：

$$K\xi_0 = 0, \quad K\xi_{j+1} = H\xi_j. \tag{10}$$

さてここで $j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ を任意に選んで固定し，各 $u_i$ を $t$ と $x$ の関数と見て次の偏微分方程式系を考える：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} \end{pmatrix} = H\xi_j \quad (= K\xi_{j+1}). \tag{11}$$

この方程式を $j$ 次の**発展方程式**（$j$-th evolution equation）と言う．このとき各 $k$ について $\int h_k dx$ は（少なくとも形式的に）この方程式系の保存量であることが次の簡単な計算から分かる：

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int h_k dx &= \int \frac{\partial}{\partial t} h_k dx \\
&= \int \sum_{i=1}^{n} \sum_{p_1,\cdots,p_n \geq 0} \frac{\partial h_k}{\partial u_i^{(p_i)}} \frac{\partial u_i^{(p_i)}}{\partial t} dx \\
&= \int \sum_{i=1}^{n} \sum_{p_1,\cdots,p_n \geq 0} \frac{\partial h_k}{\partial u_i^{(p_i)}} \partial^{p_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right) dx \\
&= \int \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{p_i \geq 0} (-1)^{p_i} \partial^{p_i}\left(\frac{\partial h_k}{\partial u_i^{(p_i)}}\right)}_{\frac{\delta h_k}{\delta u_i}} \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_{\sum_l H_{il} \frac{\delta h_j}{\delta u_l}} dx \\
&= \int \{h_j,\, h_k\}_H dx \underset{(\because\ (9))}{=} 0.
\end{aligned}$$

この計算の中で

$$\int (\text{完全微分}) dx = 0 \tag{12}$$

を用いたが，もちろんこれは無条件に成立するものではない．従って $\int h_k dx$ は，それに関与する関数が (12) を満たすという仮定の下での保存量である．

そして更に $h_j$ mod Im$\partial$ たち（またはこれらのうちの適当な無限個）が 1 次独立なら（あるいはもっと強く代数的に独立ならば），無限個の保存量が存在することになって，微分方程式系 (11) は無限可積分系であるということになる．

最も簡単な例として**ヴィラソロ PVA** を見てみよう．それは (5) において $n = 1$，すなわち $V$ における変数が 1 個だけ（それを $u$ とおく）の場合で，$\lambda$ ブラケットが

$$\{u_\lambda u\} = (\partial + 2\lambda)u + \lambda\alpha + \lambda^3 c$$

のときである．ここで $\alpha$ と $c$ は勝手な複素数である．この $\lambda$ ブラケットを 2 個の $\lambda$ ブラケットに分解することによってハミルトニアン対を作ることができる．それを次の例 1 と例 2 でやってみよう．

**例 1**　ハミルトニアン対として

$$\{u_\lambda u\}_K := \lambda,$$
$$\{u_\lambda u\}_H := (\partial + 2\lambda)u + \lambda^3 c$$

を採用すると，このときのハミルトニアンは次のようになる：

$$K = \partial,$$
$$H = u' + 2u\partial + c\partial^3$$

$\xi_j$ を求めよう．まず，条件 $K\xi_0 = \partial\xi_0 = 0$ より $\xi_0 := 1$ とおく．次に条件

$$\partial\xi_1 = H\xi_0 = (u' + 2u\partial + c\partial^3)1 = u'$$

より，$\xi_1 := u$ とおく．次に

$$\partial\xi_2 = H\xi_1 = (u' + 2u\partial + c\partial^3)u = 3uu' + cu'''$$

より，$\xi_2 := \frac{3}{2}u^2 + cu''$ とおく．次に

$$\begin{aligned}\partial\xi_3 &= H\xi_2 = (u' + 2u\partial + c\partial^3)\left(\frac{3}{2}u^2 + cu''\right)\\ &= c^2u''''' + 5cuu''' + 10cu'u'' + \frac{15}{2}u^2u'\end{aligned}$$

より，

$$\xi_3 := c^2u'''' + 5cuu'' + \frac{5}{2}cu'^2 + \frac{5}{2}u^3$$

とおく．この操作を繰り返すことによって $\xi_j$ が順次求められていく．

このハミルトニアン対の 1 次発展方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = H\xi_1 = 3uu' + cu''' \tag{13}$$

は KdV 方程式であり，この方程式の保存量 $h_j$ は $\frac{\delta h_j}{\delta u} = \xi_j$ から

$$h_0 = u,\ \ h_1 = \frac{1}{2}u^2,\ \ h_2 = \frac{1}{2}(-cu'^2 + u^3),$$
$$h_3 = \frac{1}{8}(4c^2u''^2 - 20cuu'^2 + 5u^4),\ \ \cdots$$

のように求められる．

KdV 方程式 (13) は最もポピュラーな可積分系であり，可積分系の世界のアイドルのナンバーワンである．その方程式が，このように PVA と非常に美しく結びついている．

**例 2**　今度はハミルトニアン対として

$$\{u_\lambda u\}_K := (\partial + 2\lambda)u,$$
$$\{u_\lambda u\}_H := \lambda\alpha + \lambda^3 c$$

を採ってみると，このときのハミルトニアンは次のようになる：

$$K = u' + 2u\partial,$$
$$H = \alpha\partial + c\partial^3$$

このハミルトニアン対の 0 次発展方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\big(u^{-1/2}\big)' + c\big(u^{-1/2}\big)''' \tag{14}$$

であり，これは**ハリー・ディム（Harry Dym）方程式**である．もちろん，この方程式も無限可積分系の仲間の 1 人で，$h_j$ はレナード・スキームの計算から求められて次のようになる：

$$\begin{aligned}h_0 &= 2u^{1/2},\quad h_1 = \frac{u^{-5/2}}{8}(-4\alpha u^2 + cu'^2),\\ h_2 &= \frac{u^{-11/2}}{256}(-16\alpha^2u^4 + 40\alpha cu^2u'^2\\ &\qquad -16c^2u^2u''^2 + 35c^2u'^4),\ \ \cdots.\end{aligned}$$

ハミルトニアン対をなす PVA の例があれば，そして $\xi_j$ と $h_j$ の計算が実行できて，これらがうまく存在する場合には，このように無限可積分系が 1 つ，また 1 つと得られることになる．

PVA の例およびハミルトニアン対の例は実際に豊富に存在する．この小論では，それらのうちの重要なものを統一的な立場から眺めていこうと思うが，その前に，頂点代数の 1 つの例としてザモロチコフ (Zamolodchikov) の $W_3$ 代数を見よう．それは 2 個の元 $L$（ヴィラソロ場）と $W$ で生成され，次の基本関係で定まる頂点代数である．

$$\begin{aligned}&[L_\lambda L] = (\partial + 2\lambda)L + \frac{\lambda^3}{12}c,\\ &[L_\lambda W] = (\partial + 3\lambda)W,\\ &[W_\lambda W] = (\partial + 2\lambda)\Big(:L^2: + \frac{c-34}{128}\partial^2 L\Big)\\ &\qquad + (\partial+2\lambda)^3\frac{5c+22}{384}L + \lambda^5\frac{c(5c+22)}{5760}.\end{aligned} \tag{15}$$

この構造は一見複雑に見えるけれども，$W_3$ 代数の内部には $sl(3, \mathbf{C})$ による対称性が潜んでいて，その表現論は非常に美しい．

一般に，有限次元単純リー環 $\mathfrak{g}$ とその中の冪零元 $f$ が与えられると，それに対応して**W 代数**と呼ばれる頂点代数 $W(\mathfrak{g}, f)$ が構成される．具体的な方法として，**ドリンフェルト・ソコロフ・リダクション（Drinfeld–Sokolov reduction）の量子化法**があり，この方法は W 代数の構成だけでなく，表現論の研究にも非常に重要である．また，この量子化法の理論はスーパー・リー環にも拡張できて，**スーパー・コンフォーマル代数**（Super conformal algebra, SCA）のほとんどすべてが W 代数として得られる．

## 2. ポアソン W 代数

W 代数を構成するための DS リダクションは，そこに登場するすべての元が可換であるとして同様の計算を行うことにより，そのまま“**ポアソン W 代数**”の構成に適用できる．これによって PVA が大量に得られる．例えば上述した $W_3$ 代数 (15) のポアソン版は次のようになる．

$$\begin{aligned}\{L_\lambda L\} &= (\partial + 2\lambda)L + \frac{\lambda^3}{12}c,\\ \{L_\lambda W\} &= (\partial + 3\lambda)W,\\ \{W_\lambda W\} &= (\partial + 2\lambda)\Big(L^2 + \frac{c}{128}\partial^2 L\Big)\\ &\qquad + \frac{5c}{384}(\partial + 2\lambda)^3 L + \frac{c^2\lambda^5}{1152}.\end{aligned}$$

この PVA からもハミルトニアン対を作ることができる．そして例 1 と同様の計算により，1 次の発展方程式として

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial t} &= L' + 2W',\\ \frac{\partial W}{\partial t} &= W' + 2LL' + \frac{c}{48}L'''\end{aligned}\right. \tag{16}$$

が得られ，$h_j$ は次のようになる：

$$\begin{aligned}h_0 &= L + W,\\ h_1 &= \frac{1}{3}L^3 + LW + W^2 - \frac{c}{96}L'^2,\\ &\vdots\end{aligned} \tag{17}$$

$h_0$ と $h_1$ が存在するから Kac の定理により，すべての $j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ について $h_j$ が存在する．従って，(16) は $W_3$ 代数に付随する可積分系の微分方程式であり，(17) の $h_j$ の積分はそれの保存量である．

W 代数はリー環 $\mathfrak{g}$ だけで定まるものではなくて，$\mathfrak{g}$ の冪零元 $f$ にも依存する．$\mathfrak{g} = sl(3, \mathbf{C})$ のとき，冪零元（$\neq 0$）の共役類は 2 個あって，$W_3$ 代数は主冪零元に対応するものである．もう一つの冪零元は極小冪零元であり，これに対応する W 代数は 4 個の元 $L, J, W_1, W_2$ で生成され，ポアソン版の $\lambda$ ブラケットは次のようになる．

$$\begin{aligned}&\{L_\lambda L\} = (\partial + 2\lambda)L + \frac{\lambda^3}{12}c,\\ &\{L_\lambda J\} = (\partial + \lambda)J,\\ &\{L_\lambda W_i\} = \Big(\partial + \frac{3}{2}\lambda\Big)W_i \quad (i = 1, 2),\\ &\{J_\lambda J\} = -\lambda c,\\ &\{J_\lambda W_i\} = (-1)^i 3W_i, \quad (i = 1, 2),\\ &\{W_{i\lambda} W_i\} = 0, \quad (i = 1, 2),\\ &\{W_{1\lambda} W_2\} = L + \frac{2}{c}J^2 + \frac{1}{2}(\partial + 2\lambda)J + \frac{\lambda^2}{6}c.\end{aligned}$$

ヴィラソロ代数のときと同じように，この $\lambda$ ブラケットから 2 通りのハミルトニアン対を構成することができて，このポアソン W 代数にも 2 種類の可積分系が存在するが，それの具体的な説明はスペースの都合で割愛する．これらから，次のことが予想される：

**予想 1**　$\mathfrak{g}$ がリー環のとき，任意の冪零元 $f$ について，ポアソン W 代数 $W^{Pois}(\mathfrak{g}, f)$ に付随する可積分系が存在する．

**予想 2**　$\mathfrak{g}$ がリー環で $f$ が極小冪零元のときには，ポアソン W 代数 $W^{\mathrm{Pois}}(\mathfrak{g}, f)$ に KdV 型と HD 型（“鼻毛が出てる” ではない！ この HD は Harry Dym の略）の 2 種類の可積分系が存在する．

## 3. スーパー対称化

ここに述べてきた話は，スーパー・リー環にも直ちに適用し拡張することができる．“スーパー” という名のつく代数系には偶元の他に奇元があり，頂点代数や PVA の公理に，奇元どうしの入れ替えのときに生じる符号の補正を行うことによって，スーパー対称化が得られる．スーパー・リー環の W 代数として得られる SCA の世界には，$N=1$, $N=2$, $N=3$, $N=4$, big $N=4$ というとても可愛いいアイドルたちがいて，SCA の世界へと手をとって案内してくれる．

ここでは，これらのうちで最も構造の簡単な $N=1$ SCA（愛称は **“ヌヴー・シュワルツ代数”**）の場合を見ることにしよう．$N=1$ ポアソン SCA はヴィラソロ元 $L$（偶元）とヌヴー・シュワルツ元 $G$（奇元）の生成するスーパー PVA で，次の $\lambda$ ブラケットが基本関係である：

$$
\begin{aligned}
\{L_\lambda L\} &= (\partial+2\lambda)L+\frac{\lambda^3}{12}c,\\
\{L_\lambda G\} &= \Bigl(\partial+\frac{3}{2}\lambda\Bigr)G,\\
\{G_\lambda G\} &= L+\frac{\lambda^2}{6}c.
\end{aligned}
$$

ヴィラソロ PVA のときと同じように，この $N=1$ ポアソン SCA も（KdV 型，HD 型と呼びたくなるような）2 通りのハミルトニアン対を与えてくれる．スペースの都合で，ここでは可積分系の微分方程式と $h_j$ $(j=0,1)$ のみを例 3 と例 4 に記す．

**例 3**　(KdV 型)　1 次の発展方程式は

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial t}=\dfrac{3}{2}LL'+\dfrac{c}{2}L'''+\dfrac{3}{2}GG'',\\[2mm]
\dfrac{\partial G}{\partial t}=\dfrac{3}{2}LG'+\dfrac{3}{4}L'G+2cG'''
\end{cases}
\qquad (18)
$$

で，この系の保存量は次のように得られる：

$$
\begin{aligned}
h_0 &= L,\\
h_1 &= \frac{1}{4}L^2+\frac{1}{2}GG',\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

**例 4**　(HD 型)　0 次の発展方程式は

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial t}=\bigl(L^{-1/2}\bigr)'''+\dfrac{3}{4}\bigl(L^{-5/2}GG'\bigr)''',\\[2mm]
\dfrac{\partial G}{\partial t}=-2\bigl(L^{-3/2}G'\bigr)''+\dfrac{3}{2}\bigl(L^{-5/2}L'G\bigr)''
\end{cases}
\qquad (19)
$$

で，この系の保存量は次のように得られる：

$$
\begin{aligned}
h_0 &= 2L^{1/2}-\frac{1}{2}L^{-3/2}GG'\\
h_1 &= \frac{1}{8}L^{-5/2}L'^2+\frac{105}{32}L^{-9/2}L'^2GG'\\
&\quad -\frac{3}{4}L^{-5/2}GG'''+\frac{1}{4}L^{-5/2}G'G''\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

方程式 (18) は**スーパー KdV 方程式**としてすでに知られている微分方程式である．(19) はその生い立ちから **“スーパー HD 方程式”** と呼ぶにふさわしいと思う．ランクを上げて $N=2,3,4$ の SCA についても，これと全く同じように KdV 型と HD 型という 2 種類の可積分系が存在する．

本稿ではポアソン W 代数から得られる非線型微分方程式系のうちで簡単な形のものをいくつか紹介したが，この分野は現在もなお研究が進行中である．山田泰彦著『共形場理論入門』（培風館）に，この理論の背景も含めて優れた解説がある．

これらの偏微分方程式系はランクが上がるにつれて飛躍的に複雑な形になる．しかしその背景には W 代数があり，アフィン・（スーパー）リー環がある．微分方程式系の保存量は，上述したようにポアソン W 代数を用いて得られるし，また解空間にはおそらく W 代数あるいはその基盤となるアフィン・（スーパー）リー環が関与しているに違いない．一見複雑な非線型偏微分方程式系で，どのように手をつけたら良いのか分からないところに，その内部には美しい対称性が存在している．まさしく “心の美人” と呼ぶにふさわしい，無限次元の対称性をもつ微分方程式系たちである．

（わきもと・みのる，九州大学名誉教授）

# 非線形波動から無限の対称性へ

## KP 階層と UC 階層

津田　照久

振動・波動は物理学における最も基本的な現象です．水面を伝わる波，振り子の運動，光の伝播，新体操のリボン⋯．もしも波の振幅が小さければ，これらは線形の微分方程式によって記述されて，その解は重ね合わせの原理（$1+1=2$ のような算術）により詳しく調べることができます．一方，少し大きな波になると微分方程式は「非線形」となり，その解析は一般に大変難しい問題です．

ところが，20 世紀の後半，具体的に式で書ける興味深い解を持つ非線形波動の問題が次々と見つかりました．安定な孤立波があたかも粒子のように振る舞う物理現象，いわゆる「ソリトン」の発見です．

例として，解ける非線形波動方程式の代表格である **KdV 方程式**

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{3}{2}u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \tag{1}$$

を考えましょう．この方程式は浅い水面を伝わる波のモデル化であり，未知函数 $u=u(x,t)$ は位置 $x$，時刻 $t$ における（静止水面からの）波の高さを表します．さて**進行波解** $u(x,t)=f(x+k^2t)$（速度：$-k^2$）を仮定します．これを (1) に代入し，さらに一回積分すると，函数 $f=f(s)$ についての 2 階常微分方程式

$$f''+3f^2-4k^2f+c=0,\qquad \left({}'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)$$

が得られます．一般の解は楕円函数で求積されますが，特に定数 $c=0$ の場合は双曲線函数 $\cosh X=(e^X+e^{-X})/2$ を用いて，より簡単に

$$u(x,t)=\frac{2k^2}{\cosh^2(kx+k^3t+\delta)} \tag{2}$$

と求められます（$\delta$ は積分定数）．この解は，遠方 $x\to\pm\infty$ で急減少するような，パルス状の孤立波の進行を表しています．式 (2) から「高い波ほど速く伝わる」ことが観察されますが，この性質は非線形波動を線形波動から分ける大きな特徴の一つです．

さらに面白いことに，KdV 方程式は (2) の形の孤立波を $N$ 個独立に重ね合わせたような解を持つことが知られています．孤立波どうしは大きさによって速度が異なるため，互いに衝突を繰り返しますが，相互作用の終わった後は（位相のずれを除いて）まるで何事もなかったかのように再び元の形状を取り戻します．この粒子的に振る舞う孤立波のことを**ソリトン**と呼び，それら $N$ 個の集団的運動を記述する厳密解

$$u_N(x,t)=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\tau_N(x,t) \tag{3}$$

を $\boldsymbol{N}$ **ソリトン解**と呼びます．ただし各 $\tau_N$ は

$$\begin{aligned}
\tau_1&=1+e^{\eta_1},\\
\tau_2&=1+e^{\eta_1}+e^{\eta_2}+a_{12}e^{\eta_1+\eta_2},\\
\tau_3&=1+e^{\eta_1}+e^{\eta_2}+e^{\eta_3}\\
&\quad+a_{12}e^{\eta_1+\eta_2}+a_{13}e^{\eta_1+\eta_3}+a_{23}e^{\eta_2+\eta_3}\\
&\quad+a_{12}a_{13}a_{23}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3},\quad\ldots
\end{aligned}$$

等と定められ，また数式中の指数 $\eta_i$ および孤立波どうしの相互作用を表す因子 $a_{ij}$ はそれぞれ

$$\eta_i = 2k_i x + 2{k_i}^3 t + 2\delta_i,$$
$$a_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2}{(k_i + k_j)^2}$$

と与えられます．例えば $N = 1$ の場合，実際に(3)が先程求めた進行波解(2)と一致することは容易に確かめられるでしょう．ところで，変数 $x$ と $t$ を実数に限らず複素数を動くものとすると，$u_N$ は複素函数として無数の特異点（極）を持つことが分かります．一方，$\tau_N$ は各 $x, t$ について複素平面全体で正則です．つまり，式(3)はKdV方程式の解 $u = u(x,t)$ を整函数 $\tau = \tau(x,t)$ の比として表す変数変換と見ることができます[*1)]．この自然な従属変数 $\tau$ のことを**タウ函数**と呼びます．タウ函数については後ほど詳しく説明します．

冒頭でも述べたように，一般に非線形の偏微分方程式を解くことは大変難しく，例えば「ある種の良い性質を持つ解の存在証明」自体が数学上の重要問題ともなり得ます．省みて，KdV方程式が $N$ ソリトン解に見られるような多くの任意パラメタ $(k_i, \delta_i)$ を含む厳密解を持つことは極めて異例な状況と言えます．しかも，それはKdV方程式に孤立した現象ではありません．実は，類似の性質を持つ非線形方程式（**ソリトン方程式**と総称される）が数多く知られています．一体，ソリトン方程式に現れる「厳密に解ける性質」の由来とは，何なのでしょうか？

1970年代，この謎を追い求めた数多くの数学・物理学者によってソリトン研究の波は急速な進展を遂げます．その発展は，具体的に方程式を解く様々な手法（逆散乱法，広田の直接法，リーマン面のテータ函数と準周期解の理論，…）の発見を通して，新しい数学「無限次元可積分系」の世界が創り出される過程でもありました．この小文では特に，佐藤幹夫を中心とした京都大学のグループによる「**KP階層の理論**」（1980年代初頭）を紹介したいと思います．ソリトン方程式の代数・幾何学的構造を明らかにした彼らの理論は，現代数学において「無限次元」が最も活躍する舞台の一つと言えます．

*1) 広田良吾によるこの変数変換は，古典的な「楕円函数をテータ函数の比として表す公式」の類似になっています．

## 1. ソリトン方程式の階層構造

未知函数 $u = u(x,y,t)$ に対する，次の非線形偏微分方程式

$$\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{3}{2}u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) \tag{4}$$

を**KP方程式**と言います．これは元々，KdV方程式の空間2次元への拡張として導入されたものであり，函数 $u$ が変数 $y$ に依存しない場合，文字通り(4)は(1)に帰着します．

さて，天下り的ではありますが，未知函数 $\psi = \psi(x,y,t)$ についての線形微分方程式系

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = B_2\psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = B_3\psi \tag{5}$$

を考えましょう．ただし変数 $x$ についての微分作用素 $B_2$ と $B_3$ を

$$B_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u, \quad B_3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + v\frac{\partial}{\partial x} + w$$

としました．2つの方程式(5)の**両立条件**は，微分作用素の交換子積 $[P,Q] = PQ - QP$ を用いて，

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} - B_2, \frac{\partial}{\partial t} - B_3\right] = 0 \tag{6}$$

と表されます．これは係数 $u, v, w$ に対する条件

$$v = \frac{3}{2}u,$$
$$2\frac{\partial w}{\partial x} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + v\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

に等価ですが，そこから $v, w$ を消去して得られる $u$ についての微分関係式が(4)に他なりません．すなわち，KP方程式(4)とは線形方程式系(5)が互いに矛盾なく成立することを示す非線形方程式

であることが分かりました．式 (6) を KP 方程式のラックス表示と呼びます．

今度は，一般の自然数 $n=1,2,\ldots$ について

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_n}=B_n\psi,\quad B_n=\frac{\partial^n}{\partial x^n}+\cdots \tag{7}$$

の形の線形微分方程式の（無限）連立系を考えてみましょう．ここで $x=x_1, y=x_2, t=x_3$ に加えて，新しい独立変数 $x_4, x_5, \ldots$ を導入しました．先程と同様にして，(7) の両立条件

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_m}-B_m, \frac{\partial}{\partial x_n}-B_n\right]=0 \tag{8}$$

から $B_m, B_n$ の係数の間の関係式が従います．こうして得られる非線形微分方程式の無限系列を**KP 階層**と呼びます．特に，非自明な方程式が得られる最初の例が $(m,n)=(2,3)$ の場合であり，ちょうどそれが KP 方程式に対応しています．

| ソリトン方程式 | 独立変数 |
|---|---|
| KP 方程式 | $x=x_1, y=x_2, t=x_3$ |
| $\cap$ | $\cap$ |
| KP 階層 | $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots)$ |

実は KP 方程式だけでなく，見かけの異なる様々なソリトン方程式について「ラックス表示」とその帰結として「階層化」が知られています．これは，すべてのソリトン方程式は KP 階層の特殊化として得られるという経験的事実の反映です．例えば，KdV 方程式（の階層）は KP 階層に「偶数番目の時間発展が自明」という制限を付け加えることで得られます．つまり，KP 階層こそがソリトン方程式全体の中で最も普遍的な対象であるということができます．

ところで，一般の $(m,n)$ に対して，直接 (8) から KP 階層の高次微分方程式を書き下すのは（次々と新しい従属変数が必要になり）容易ではありません．そもそも，得られた方程式の系列が無矛盾であることは，一体どのようにして保証されるのでしょうか？

## 2. KP 階層の《母函数表示》＝双線形恒等式

未知函数 $\tau=\tau(\boldsymbol{x})=\tau(x_1,x_2,\ldots)$ を変数変換

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}\log\tau$$

によって新たに導入すると，KP 方程式 (4) は

$$\left({D_1}^4-4D_1D_3+3{D_2}^2\right)\tau\cdot\tau=0 \tag{9}$$

と書き直されます．ただし記号 $D_n$ は変数 $x_n$ に関する**広田微分**で，次のように定義されます．

$$P(D_1,D_2,\ldots)f(\boldsymbol{x})\cdot g(\boldsymbol{x}) = P\left(\frac{\partial}{\partial a_1},\frac{\partial}{\partial a_2},\ldots\right)f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\bigg|_{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}}.$$

式 (9) を KP 方程式の**広田表示**，従属変数 $\tau$ を**タウ函数**と呼びます．実は，KP 階層の高次微分方程式もすべて

$$\begin{aligned}&\left({D_1}^3D_2-3D_1D_4+2D_2D_3\right)\tau\cdot\tau=0,\\&\left({D_1}^6-20{D_1}^3D_3-45{D_1}^2{D_2}^2\right.\\&\quad\left.+144D_1D_5-80{D_3}^2\right)\tau\cdot\tau=0,\quad\ldots\end{aligned} \tag{10}$$

という風に，$\tau$ についての2次関係式の形に表すことができます．

タウ函数の真骨頂は，それによって，KP 階層の無限個の微分方程式がたった一つの数式として見事にまとめ上げられる点にあります．

**定理 1** $\tau=\tau(\boldsymbol{x})$ が KP 階層の解となる必要十分条件は，任意の $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}''$ に対して

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint\tau(\boldsymbol{x}'+[z^{-1}])\tau(\boldsymbol{x}''-[z^{-1}])\times e^{\xi(\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}',z)}\mathrm{d}z=0 \tag{11}$$

が成り立つことである．

ここでは，$\oint\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\sqrt{-1}}$ は被積分函数の（形式的）ローラン展開の $z^{-1}$ の係数を取るという操作を意味します．また，記号

$$\xi(\boldsymbol{x},z)=\sum_{n=1}^{\infty}x_nz^n,\quad [t]=\left(t,t^2/2,t^3/3,\ldots\right)$$

を用いました．

逆に，(11) の $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}''$ におけるテイラー展開を考えることから，KP 階層の非線形微分方程式が再現されます．実際 $x_n'=x_n+h_n, x_n''=x_n-h_n$（$h_n$：変位）を代入すると，(11) の被積分函数は

$$\exp\left(-2\sum_{n=1}^{\infty}h_nz^n\right)$$
$$\times\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(h_n+\frac{1}{nz^n}\right)D_n\right)\tau\cdot\tau$$

となります．あとは $(h_1,h_2,\ldots)$ について展開し，$z^{-1}$ の係数を取ればよいわけです．例えば，$h_3$ の係数が KP 方程式の広田表示 (9) を与えます．

一方，KP 階層の元々の起源が線形問題 (7) の両立条件にあったことを思い出しましょう．それらの線形微分方程式も，形式解として**波動函数**[*2)]

$$\psi(\boldsymbol{x},k)=\frac{\tau(\boldsymbol{x}-[k^{-1}])}{\tau(\boldsymbol{x})}e^{\xi(\boldsymbol{x},k)}$$

を導入することにより，実はすべて (11) から得られます．例えば，非自明な最初の 2 式は

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}=\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}+\frac{{D_1}^2\tau\cdot\tau}{\tau^2}\right)\psi,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial x_3}=\left\{\frac{\partial^3}{\partial {x_1}^3}+\frac{3}{2}\frac{{D_1}^2\tau\cdot\tau}{\tau^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\right.$$
$$\left.+\frac{3}{4}\frac{D_1D_2\tau\cdot\tau}{\tau^2}+\frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{{D_1}^2\tau\cdot\tau}{\tau^2}\right)\right\}\psi$$

となりますが，これは KP 方程式に付随する線形方程式系 (5) に相当しています．

まとめると，タウ函数についての 2 次関係式 (11) は，非線形方程式の系列と線形方程式の系列の両方の意味で，KP 階層を含んでいることが分かりました．また，無限個の方程式の間の無矛盾性は，すべてがたった一つの数式から導かれることを考えれば，自ずと従います．KP 階層の「母函数表示」(11) を**双線形恒等式**と呼びます．双線形恒等式を KP 階層の定義そのものと考えられる点が大切です．

*2) KdV 階層とは KP 階層に簡約条件：$\partial\tau/\partial x_{2n}=0$ $(n=1,2,\ldots)$ を課したものです．この特殊化を KP 階層に付随する線形方程式系の最初の式に適用すると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u\right)\psi=k^2\psi$$

を得ます．これは KdV 階層の解 $u$ を位置エネルギーの項とする**シュレーディンガー方程式**の形をしています．このことから，量子力学の用語に因んで，従属変数 $\psi$ は**波動函数**と呼ばれています．また，エネルギー固有値に現れる $k$ を**スペクトル変数**と言います．この付加的なパラメタ $k$ が定数であるという意味で，高次の時間発展はシュレーディンガー方程式の**スペクトル保存変形**を記述しています．

## 3. グラスマン多様体

$n$ 次元（複素）ベクトル空間内の $r$ 次元部分空間全体の集合を $G(r,n)$ と表し，**グラスマン多様体**と呼びます．

初めに $(r,n)=(2,4)$ の場合を考えましょう．$G(2,4)$ の 1 点，つまり 2 次元部分空間 $h$ は，2 つの 1 次独立なベクトルの組 $(a_1,\ldots,a_4),(b_1,\ldots,b_4)$ を基底として並べた $2\times4$ 行列

$$M=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\end{pmatrix}$$

によって指定できます．$M$ の小行列式

$$c_{ij}=\begin{vmatrix}a_i&a_j\\b_i&b_j\end{vmatrix}$$

の連比 $[c_{12}:c_{13}:c_{14}:c_{23}:c_{24}:c_{34}]$ は基底の取り方に依りませんが，これを射影空間 $\mathbb{P}^5$ の斉次座標と見なしたものを $G(2,4)$ の点 $h$ の**プリュッカー座標**と言います．実は，行列式の恒等式[*3)]

$$c_{12}c_{34}-c_{13}c_{24}+c_{14}c_{23}=0 \qquad (12)$$

によって $G(2,4)\subset\mathbb{P}^5$ は滑らかな 2 次超曲面となります．小行列式の間に成り立つ (12) のような 2 次関係式を**プリュッカー関係式**と呼びます．

同様に，一般のグラスマン多様体 $G(r,n)\subset\mathbb{P}^{{}_nC_r-1}$ もプリュッカー関係式の定める 2 次超曲面の交わりとして実現することができます[*4)]．

*3) 恒等式 (12) は，4 次正方行列

$$\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\end{pmatrix}$$

を上下 2 行ずつに分けるラプラス展開によって示されます．

*4) グラスマン多様体 $G(r,n)$ は $r(n-r)$ 次元の射影多様体となります．例えば，
- $G(1,n)$：射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ そのもの，
- $G(2,5)$：$\mathbb{P}^9$ 内の次数 5 の 6 次元多様体，
- $G(2,6)$：$\mathbb{P}^{14}$ 内の次数 14 の 8 次元多様体．

## 4. 佐藤理論

少し唐突かも知れませんが，先程の行列 $M$ を変数 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots)$ について動かすことを考えてみましょう．ここで成分 $a_i, b_i$ の時間発展は

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}=a_{i+j},\quad \frac{\partial b_i}{\partial x_j}=b_{i+j}$$

に従うものとします．このとき，面白いことに一般のプリュッカー座標 $c_{ij}$ は基準となる一つの座標 $\tau=c_{12}$ の導関数として（$\partial_i=\partial/\partial x_i$）

$$\begin{aligned}
c_{13}&=\partial_1\tau,\\
c_{14}&=\frac{1}{2}\left(\partial_1{}^2+\partial_2\right)\tau,\\
c_{23}&=\frac{1}{2}\left(\partial_1{}^2-\partial_2\right)\tau,\\
c_{24}&=\frac{1}{3}\left(\partial_1{}^3-\partial_3\right)\tau,\\
c_{34}&=\frac{1}{12}\left(\partial_1{}^4-4\partial_1\partial_3+3\partial_2{}^2\right)\tau
\end{aligned}$$

の形に表されます．上の関係を恒等式 (12) に代入することにより $\tau$ に対する微分方程式

$$\left(D_1{}^4-4D_1D_3+3D_2{}^2\right)\tau\cdot\tau=0$$

を得ますが，これはKP 方程式 (9) そのものです．

実は，KP 階層に含まれる他の微分方程式もすべてプリュッカー関係式に由来しています．一方，前節で見たように，幾何学的にはプリュッカー関係式とはグラスマン多様体の定義方程式を与えるものでした．このようにして佐藤理論の真髄である次の主張が導かれます．

**定理 2**　KP 階層の解の全体は（無限次元の）グラスマン多様体である．

ここに現れたのは，無限次元ベクトル空間内の「半分の」次元の部分空間全体の集合のことで，**佐藤グラスマン多様体**（SGM）と呼ばれるものです[*5)]．

さて，通常のグラスマン多様体と同様に SGM は**対称空間**を成し，その全体は勝手な 1 点の無限次元一般線形群 "$GL(\infty)$" による軌跡と見ることができます．驚くべきことに，この群の KP 階層の解への作用（の無限小変換）は**頂点作用素**

$$\begin{aligned}
X^{\pm}(k)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}X_n^{\pm}k^n\\
&=e^{\pm\xi(\boldsymbol{x},k)}e^{\mp\xi(\widetilde{\partial}_{\boldsymbol{x}},k^{-1})}
\end{aligned}\qquad(13)$$

を用いて具体的に書けてしまいます．ただし

$$\widetilde{\partial}_{\boldsymbol{x}}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_3},\ldots\right)$$

と記しました．

実際に，自明な解 $\tau=1$ から始めて KP 階層のソリトン解を構成してみましょう．微分作用素[*6)]

$$\begin{aligned}
Z(p,q)&=\;:X^+(p)X^-(q):\\
&=e^{\xi(\boldsymbol{x},p)-\xi(\boldsymbol{x},q)}e^{-\xi(\widetilde{\partial}_{\boldsymbol{x}},p^{-1})+\xi(\widetilde{\partial}_{\boldsymbol{x}},q^{-1})}
\end{aligned}$$

の生成する変換 $e^{\epsilon Z(p,q)}$ を施すと，1 ソリトン解

$$\begin{aligned}
\tau_1&=e^{\epsilon Z(p,q)}.1=(1+\epsilon Z(p,q)).1\\
&=1+\epsilon e^{\xi(\boldsymbol{x},p)-\xi(\boldsymbol{x},q)}
\end{aligned}$$

は直ちに得られます．ここで公式

$$\begin{aligned}
&Z(p_i,q_i)Z(p_j,q_j)=a_{ij}:Z(p_i,q_i)Z(p_j,q_j):,\\
&a_{ij}=\frac{(p_i-p_j)(q_i-q_j)}{(p_i-q_j)(q_i-p_j)}
\end{aligned}$$

を用いました（特に $Z(p,q)^2=0$）．一般の $N$ ソリトン解についても同じ変換を繰り返すことで

$$\tau_N=e^{\epsilon_N Z(p_N,q_N)}\cdots e^{\epsilon_2 Z(p_2,q_2)}e^{\epsilon_1 Z(p_1,q_1)}.1$$

のように求まります．また KP 階層から KdV 階層への簡約条件は**パラメタの特殊化** $p_i=-q_i(=k_i)$ に等価ですが，始めに紹介した KdV 方程式のソリトン解 (3) はこれによって確かに回復されます．

今までの話をまとめると

**無限次元の解空間に作用する無限の対称性—それこそがソリトン方程式の持つ可積分性の由来である．**

このような理解の仕方が KP 階層を通して得られたことになります．

---

*5)　SGM の無限個のプリュッカー座標は**ヤング図形**の集合とちょうど 1 : 1 に対応し，それらは KP 階層の解の**シューア函数**による展開の係数として実現されます．

*6)　"$:\ :$" は正規順序積を表す記号で，例えば

$$:x\frac{\partial}{\partial x}:\;=\;:\frac{\partial}{\partial x}x:\;=x\frac{\partial}{\partial x}$$

のように，$:\ :$ の内側では掛け算と微分は可換と見なし，微分を右へ，掛け算を左へと「標準的な順序に」入れ替えた後に $:\ :$ を外すという操作を意味します．

## 5.「無限」をもう一つ付け加える

再びKP階層の「母函数表示」(定理1) について考えてみます．頂点作用素 (13) を用いると，双線形恒等式 (11) は

$$\sum_{i+j=-1} X_i^- \tau \otimes X_j^+ \tau = 0 \tag{14}$$

の形に書き直されます*7)．ただし記号 $f \otimes g$ は互いに無関係な任意変数 $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}''$ の函数の積 $f(\boldsymbol{x}')g(\boldsymbol{x}'')$ を意味するものです．元のKP方程式 (4) の外見の複雑さを思い出すと，その階層全体の情報を担っている数式（第2節参照）がこれほど簡単であるのには驚嘆させられます．

さて，独立変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ の次数について，各変数 $x_n$ を $n$ 次と数えることにしましょう．このときKP階層の方程式は実はすべて**斉次式**になります．この性質は表示 (14) からも明らかですが，具体例で見るならば (9) は4次の斉次式，(10) の2式はそれぞれ5次と6次という風になります．つまりKP階層とは「**正の時間発展を持つ斉次な無限次元可積分系**」ということができます．では，さらに負の次数の無限変数を付け加えることは可能なのでしょうか？

このような発想から得られるKP階層の自然な拡張について以下説明します．2系列の無限変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ に対し，各変数の次数を $\deg x_n = n$, $\deg y_n = -n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ と数えることにします．**互いに可換な頂点作用素の組***8)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n^{\pm} k^n = e^{\pm\xi(\boldsymbol{x}-\widetilde{\partial}_{\boldsymbol{y}},k)} e^{\mp\xi(\widetilde{\partial}_{\boldsymbol{x}},k^{-1})},$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} Y_n^{\pm} k^{-n} = e^{\pm\xi(\boldsymbol{y}-\widetilde{\partial}_{\boldsymbol{x}},k^{-1})} e^{\mp\xi(\widetilde{\partial}_{\boldsymbol{y}},k)}$$

を導入し，これを出発点としましょう．

*7) 式 (11) の被積分函数をずらしの作用 $e^{a\partial/\partial x} f(x) = f(x+a)$ に気を付けて式変形すれば，この書き換えは容易に理解できます．

*8) 2つの作用素は，変数 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ および $k$ と $1/k$ の役割を入れ換えると，同じ形をしています．また1式目とKP階層の頂点作用素 (13) との違いに注目してみてください．

**定義3**　未知函数 $\tau = \tau(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対する2連立双線形方程式

$$\sum_{i+j=-1} X_i^- \tau \otimes X_j^+ \tau = \sum_{i+j=-1} Y_i^- \tau \otimes Y_j^+ \tau = 0$$

を**UC階層**と呼ぶ．

函数 $\tau$ が変数 $\boldsymbol{y}$ に依存しない場合，UC階層は文字通りKP階層に帰着します*9)．また，UC階層の解の全体は2つの佐藤グラスマン多様体の直積を成すことが示されます．とりわけ興味深いのは斉次多項式解です．

ヤング図形の2つ組 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{l'})$ に対し，**普遍指標** $S_{[\lambda,\mu]}$ を行列式

$$S_{[\lambda,\mu]} = \det \begin{pmatrix} q_{\mu_{l'-i+1}+i-j}, & i \le l' \\ p_{\lambda_{i-l'}-i+j}, & i > l' \end{pmatrix}_{1\le i,j\le l+l'}$$

で定義します*10)．ただし $p_n = p_n(\boldsymbol{x})$ は母函数

$$e^{\xi(\boldsymbol{x},k)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p_n k^n$$

で決まる変数 $\boldsymbol{x}$ のみに関する多項式とし，一方 $q_n = q_n(\boldsymbol{y})$ は $p_n$ において単純に $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y}$ に置き換えたものとします．このとき，例えば

$$S_{[\emptyset,\emptyset]} = 1, \quad S_{[(1),\emptyset]} = x_1,$$
$$S_{[(1),(1)]} = x_1 y_1 - 1,$$
$$S_{[(2,1),(1)]} = \left(\frac{{x_1}^3}{3} - x_3\right) y_1 - {x_1}^2, \quad \ldots$$

のように，$S_{[\lambda,\mu]}$ は次数がヤング図形の面積の差 $|\lambda| - |\mu|$ に等しい斉次多項式を与えます．

**定理4**　UC階層の斉次多項式解の全体は普遍指標の集合に一致する*11)．

この主張は「シューア函数がKP階層の斉次多項式解として特徴付けられる」ことの類似です．

*9) 一般の場合，UC階層を変数 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ についての方程式の系列として素朴に書き下そうとすると，実はすべて無限階微分方程式になります．

*10) 普遍指標はシューア函数の拡張で，小池和彦によって発見されたものです．実際 $\mu = \emptyset$ の場合，普遍指標はシューア函数に帰着します：$S_{[\lambda,\emptyset]} = \det\left(p_{\lambda_i - i + j}\right) = S_\lambda$.

*11) UC階層という名称は「普遍指標（universal character）を特徴付ける無限次元可積分系」に由来しています．

表 1　KP 階層と UC 階層.

| | KP 階層 | UC 階層 |
|---|---|---|
| 独立変数 | $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots)$, $\deg x_n = n$ | $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(x_1,x_2,\ldots,y_1,y_2,\ldots)$, $\deg x_n=n$, $\deg y_n=-n$ |
| 従属変数 | $\tau=\tau(\boldsymbol{x})$ | $\tau=\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ |
| 双線形恒等式 | $\sum_{i+j=-1} X_i^- \tau \otimes X_j^+ \tau = 0$ | $\sum_{i+j=-1} X_i^- \tau \otimes X_j^+ \tau = 0$, $\sum_{i+j=-1} Y_i^- \tau \otimes Y_j^+ \tau = 0$ |
| 頂点作用素 | $\sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n^{\pm} k^n = e^{\pm\xi(\boldsymbol{x},k)} e^{\mp\xi(\widetilde{\partial}_{\boldsymbol{x}},k^{-1})}$ | $\sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n^{\pm} k^n = e^{\pm\xi(\boldsymbol{x}-\widetilde{\partial}_{\boldsymbol{y}},k)} e^{\mp\xi(\widetilde{\partial}_{\boldsymbol{x}},k^{-1})}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} Y_n^{\pm} k^{-n} = e^{\pm\xi(\boldsymbol{y}-\widetilde{\partial}_{\boldsymbol{x}},k^{-1})} e^{\mp\xi(\widetilde{\partial}_{\boldsymbol{y}},k)}$ |
| 斉次多項式解 | $S_\lambda(\boldsymbol{x})$：シューア函数 | $S_{[\lambda,\mu]}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$：普遍指標 |
| 解空間 | SGM：佐藤グラスマン多様体 | SGM × SGM |

ところで，UC 階層の多項式とは限らない一般の斉次解を考えることから「**モノドロミー保存変形**」との繋がりが見えてきます．少しだけ詳しく説明します．頂点作用素で結ばれた隣接する解の間には，元の双線形恒等式と似た関係式が成り立ちます．典型的には

$$\tau_{m,n}\otimes\tau_{m+1,n+1} = \sum_{i+j=0} X_i^- \tau_{m+1,n} \otimes X_j^+ \tau_{m,n+1}$$

のような方程式です．そこで，解の列 $\{\tau_{m,n}\}$ に対する付帯条件として**斉次性**：$E\tau_{m,n}=d_{m,n}\tau_{m,n}$ と**周期性**：$\tau_{m+L,n}=\tau_{m,n+L}=\tau_{m,n}$ を課します．ただし微分作用素

$$E=\sum_{k=1}^{\infty}\left(kx_k\frac{\partial}{\partial x_k}-ky_k\frac{\partial}{\partial y_k}\right)$$

は**次数を測る**作用素です*12)．さらに独立変数 $x_k, y_k$ を新たに変数 $\boldsymbol{t}=(t_0,t_1,\ldots,t_N)$ の「冪和」

$$x_k=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{N}\theta_i {t_i}^k,\quad y_k=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{N}\theta_i {t_i}^{-k}$$

で読み替えると，UC 階層は**シュレジンジャー系**（$S_{L,N+3}$ と記す）と呼ばれる有限次元可積分系に帰着します．これは，リーマン球面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上に $N+3$ 個の確定特異点を持つ $L$ 連立 1 階線形常微分方程式*13) のモノドロミー保存変形を記述する非線形微分方程式系です．

特に $L=2$ の場合，$S_{L,N+3}$ は $\boldsymbol{N}$ **変数ガルニエ系**という多時間ハミルトン系に等価であり，さらに $N=1$ とすると**パンルヴェ第 6 方程式**が得られます．パンルヴェ方程式の解は様々な数理物理学の問題に現れる，楕円函数やガウスの超幾何函数などの次に来るべき重要な特殊函数です．

*12)　実際 $ES_{[\lambda,\mu]}=(|\lambda|-|\mu|)S_{[\lambda,\mu]}$ となります．

*13)　正確には「$N+3$ 個の確定特異点のうち $N+1$ 個の近傍で $L-1$ 次元の正則解を持つ」ような線形微分方程式が UC 階層の波動函数のみたす方程式として自然に現れます．また複素パラメタ $d_{m,n}$, $\theta_i$ は特異点での指数に対応しています．

## 参考文献


1)　三輪哲二，伊達悦朗，神保道夫：『ソリトンの数理』，岩波書店．
2)　広田良吾：『直接法によるソリトンの数理』，岩波書店．
3)　田中俊一，伊達悦朗：『KdV 方程式—非線型数理物理入門』，紀伊國屋書店．
4)　戸田盛和：『波動と非線形問題 30 講』，朝倉書店．
5)　高崎金久：『可積分系の世界—戸田格子とその仲間』，共立出版．
6)　和達三樹：『非線形波動』，岩波書店．
7)　岡本和夫：『パンルヴェ方程式』，岩波書店．


（つだ・てるひさ，九州大学大学院数理学研究院）

# 無限次元表現

関口　英子

## 1. 群の無限次元表現

$V$ を複素ベクトル空間とするとき，可逆な線型変換全体のなす集合 $GL_{\mathbf{C}}(V)$ は合成を積とすることによって群としての構造をもつ．

$V$ を表現空間とする**群 $G$ の表現**とは，群準同型写像

$$\rho : G \to GL_{\mathbf{C}}(V) \tag{1}$$

のことである．

文学的にいえば[4)]，表現とは群 $G$ を標準的な群である $GL_{\mathbf{C}}(V)$ に $\rho$ で映した一つの「シルエット」である．シルエットが集まれば，もとの対象がより深く理解できると期待される．無機的にいえば，**群の表現論**とは群準同型写像 (1) の研究のことである．

さて $G$ が行列群，すなわち，$GL(n, \mathbf{C})$ 自身やその部分群として実現されている場合には，包含写像 $G \subset GL(n, \mathbf{C})$ そのものが $G$ の一つの表現（**自然表現**）である．しかしこのような行列群 $G$ に対しても，$V = \mathbf{C}^n$ に対する自然表現だけではなく，$V$ が無限次元ベクトル空間の場合の表現にまで対象を拡げることによって，非常に豊かな数学的対象が現れるのである．

**無限次元表現論**は量子力学の黎明期に生まれた．その後，現在に至るまで，70 年以上にわたって解析・幾何・代数における様々な分野の進展と有機的につながって，次々と華やかな発展を遂げてきた．本稿では無限次元表現論が何を目指し，現在何が分かっていて，何が未解決であるかについての一端に触れたいと思う．

なお，$V$ が無限次元の場合には，$V$ の位相を考える立場（**解析的な表現論**）と位相を考えない立場（**代数的な表現論**）がある．本稿では，解析的な立場をとり，無限次元ベクトル空間が非コンパクトなリー群によって統制される場合に重心をおく．そこで以下では，

$$G = \text{非コンパクトなリー群}\ (\fallingdotseq \text{行列群}),$$
$$V = \text{ヒルベルト空間やフレッシェ空間}$$

を基本的な設定として話を進める．

## 2. 無限次元の既約表現と既約分解

無限次元表現論の重要な諸問題とその手法を

**A1.** これ以上分割できない最小単位を求める，
**A2.** 最小単位を積み上げて全体をつくる，

という—analysis and synthesis の哲学—の観点で整理した解説[5)]を参考にして，いくつかの基本的な結果を手短かに紹介しよう．

### 2.1 無限次元既約表現

まず，「これ以上分割できない最小単位」をキーワードとして考えてみよう．

$G$ を群，$N$ をその正規部分群とするとき，$G$ はより小さな群 $N$ と商群 $G/N$ に分解される（正確には，$N$ と $G/N$ から $G$ を再構成するために

は，群拡大の理論が必要である）．この意味で，群の‘最小単位’に相当する概念は単純群（非自明な正規部分群が存在しない群）といえる．

同様に，**リー群**（多様体の構造を併せもつ群）の場合の最小単位は**単純リー群**（次元が 0，または余次元が 0 以外の正規部分群をもたないリー群）である．$SL(n,\mathbf{R}), SL(n,\mathbf{C}), Sp(n,\mathbf{R}), Sp(n,\mathbf{C}), O(p,q)$ $(p+q \geq 5)$ などの古典的に知られた行列群は単純リー群の典型例である．微分幾何の言葉で述べれば，既約リーマン対称空間の等長変換群（あるいはそれと局所同型な群）が単純リー群である（É. Cartan）．

次に，群の表現における‘最小の単位’に相当する概念は，何であろうか？ それは非自明な部分表現をもたない表現，すなわち，**既約表現**と考えるのが自然であろう．

従って，「単純リー群の既約表現」はリー群の表現の中で特に基本的な対象であると考えられる．ある種の微分表現の同値類の意味では，その分類は 1970 年代後半から 1980 年代にかけて完成した（**Langlands の分類**）．現在では行列要素の漸近挙動，最小 $K$-type を用いる Vogan の代数的分類法，旗多様体上の $\mathcal{D}$-加群を用いる Beilinson–Bernstein の理論の 3 種類の分類法が知られている．

なお，既約表現の分類が完成したといっても，そのうちのどれがユニタリ表現の構造をもち得るかというような基本的な問題（**ユニタリ双対の分類問題**）は未解決である．

### 2.2 既約分解

有限次元表現の場合には，Jordan–Hölder 組成列を考えることにより，最小単位である既約表現に到達する．しかし，無限次元表現の場合には，部分表現をとるという操作を有限回繰り返しただけでは既約な表現にたどりつかないことがあり得る．すなわち，「最小単位のものに分解する」ということは無限次元表現に対して決して明らかな考え方ではない．それが有効であるような枠組みが，以下に述べるユニタリ表現である．

表現空間 $V$ がヒルベルト空間であり，

$$||\rho(g)u|| = ||u||, \quad (^\forall u \in V, ^\forall g \in G) \qquad (2)$$

をみたすとき $\rho : G \to GL_{\mathbf{C}}(V)$ によって与えられる表現を**ユニタリ表現**という．群 $G$ にも位相が入っているときは，写像 $G \times V \to V, \quad (g,v) \mapsto \rho(g)v$ が連続であることも要請する．このとき，次の定理が成り立つ：

**定理 2.1**（Mautner–Teleman, 1976[10)]） 局所コンパクト群の任意のユニタリ表現は既約ユニタリ表現に分解できる．

正則表現 $L^2(G)$ に定理 2.1 を適用することで，次の古典的な定理も簡単に得られる．なお定理 2.2 は表現論の黎明期に，既約ユニタリ表現の分類問題の意義を明確にしたという点において歴史的に重要な結果であった．

**定理 2.2**（Gelfand–Raikov, 1943） 局所コンパクト群 $G$ の既約ユニタリ表現は（$G$ の各点を分離できるという意味で）豊富に存在する．

具体的な既約分解の例を第 3 節，および，第 4 節で論じよう．

### 2.3 既約ユニタリ表現

そもそも既約ユニタリ表現の表現空間は有限次元か？ あるいは無限次元か？ この素朴な疑問に答えるために，2 つの典型例を述べる．

**定理 2.3** コンパクト群の既約ユニタリ表現はすべて有限次元である．

**定理 2.4** 連結な非コンパクト単純リー群の既約ユニタリ表現は 1 次元の自明なもの以外はすべて無限次元である．

定理 2.2 と定理 2.4 を合わせると，非コンパクトな単純リー群には「無限次元の既約ユニタリ表現が豊富にある」ということが帰結される．実は $G$ の既約な無限次元ユニタリ表現で互いに同値でないものは連続濃度存在する．

$G = SL(n,\mathbf{R})$ の場合は，その既約ユニタリ表現の分類は 1980 年代に完成した（後述の定理 5.1）が，一般の単純リー群の既約ユニタリ表現の分類は完成していない．$Sp(n,\mathbf{R})$ や $O(p,q)$ には，まだ発見されていない既約ユニタリ表現が存在する

可能性が高いと思われる．

個々の表現ではなく，群の表現がどれだけあるかを系統的に考えてみよう．第1節では表現とは群のシルエットのようなものだと述べた．シルエットからもとの群が復元できるというのが次の**双対定理**である．

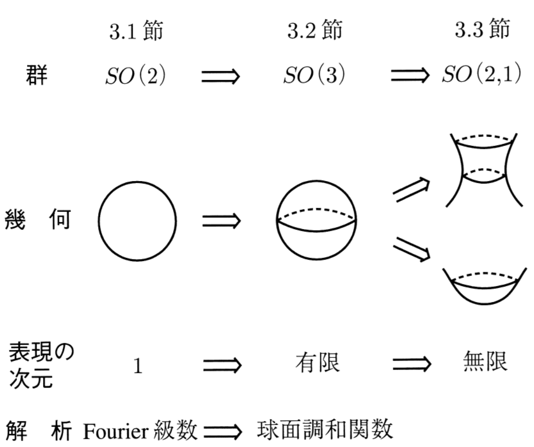
**定理 2.5**（ポントリャーギン–淡中–辰馬）局所コンパクト群 $G$ のユニタリ表現を‘すべて’知れば，もとの群を復元できる．

群 $G$ を復元するためには分岐則（第4節）の特別な場合であるテンソル積の分解の情報なども必要となる．双対定理の厳密な定式化や歴史については辰馬氏の著書[10)]が詳しい．

## 3. 非可換調和解析と無限次元表現

**非可換調和解析**（空間の対称性を用いた大域解析）においては，無限次元表現が自然な道具となる．この節では，その簡単な例（2次元の幾何）を通してこのことを考察する．

この節の設定を下図にまとめておこう．




### 3.1 $SO(2)$ とフーリエ級数

まず，1次元の幾何から始めよう．$\mathbf{R}$ 上の周期1の周期関数 $f$ を円周 $S^1(\simeq \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ 上の関数と同一視する．$f$ のフーリエ級数展開は

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \tag{3}$$

で与えられる．(3) の右辺は，関数 $f(x)$ を基底 $\{e^{2\pi ikx}\}$ で展開したものと見ることができる．

フーリエ級数を定義するためには $S^1$ 上の $e^{2\pi ikx}$ という関数をあらかじめ知っている必要がある．初心に戻って，$e^{2\pi ikx}$ （あるいは $\cos 2\pi kx$ や $\sin 2\pi kx$）といった $S^1$ 上の「基本的な関数」を‘発見’するための2つの視点を以下で述べる．

**a.** 微分方程式からの視点

$\mathbf{R}$ 上の $C^1$ 級の周期関数 $h(x)$ が微分作用素 $\frac{d}{dx}$ の固有関数ならば，$h(x)$ は $e^{2\pi ikx}$ の定数倍に限る．

**b.** 群の表現からの視点

$\mathbf{R}$ 上の連続な周期関数 $h(x)$ が加法公式

$$h(x)h(y) = h(x+y) \tag{4}$$

をみたすならば $h(x)$ は $e^{2\pi ikx}$ の形で与えられる．

**a** は解析的な条件，**b** は代数的な条件であり，いずれの視点も $e^{2\pi ikx}$ という基本的な関数の特徴づけを与えている．このことは

> 非可換調和解析（**a** の視点）
>
> $\Longleftrightarrow$ 群の表現論（**b** の視点） (5)

という対応の原型である．

### 3.2 $SO(3)$ と $S^2$ 上の球面調和関数

本項では $S^1 \Longrightarrow S^2$ の一般化を述べる．ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の距離を2次元球面

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

に誘導し，そのリーマン計量に関するラプラシアン $\Delta$ の固有関数空間を

$$V_\lambda = \{\varphi \in C^\infty(S^2) : \Delta\varphi = \lambda\varphi\}$$

とおく．$S^2$ はコンパクトなので，ラプラシアンの固有値は離散的である．明示的に述べると，$V_\lambda \neq \{0\}$ となる $\lambda$ は $\lambda(k) := -k(k+1)$ $(k = 0,1,2,\cdots)$ の形に限られ，その次元は $2k+1$ であることが知られている．

古典的な**球面調和関数展開**は，$S^2$ 上の任意の

$C^\infty$ 級関数 $f$ が広義一様収束する級数

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k, \quad (f_k \in V_{\lambda(k)}) \tag{6}$$

に一意的に展開されることを主張している．この展開定理は，円周 $S^1$ のフーリエ級数展開を 2 次元球面 $S^2$ に一般化したものとみなせる．

上述の古典解析の結果を群の表現論の立場から見直してみよう．直交群

$$O(3) = \{g \in GL(3, \mathbf{R}) : {}^t gg = I_3\}$$

は $\mathbf{R}^3$ の単位球面 $S^2$ を保つ．$g \in O(3)$ に対して $f^g(x) = f(g^{-1}x)$ とおくと，

$$C^\infty(S^2) \to C^\infty(S^2), \quad f \mapsto f^g$$

によって，$C^\infty(S^2)$ 上に $O(3)$ の表現が定義される．一方，$O(3)$ の $S^2$ への作用は等長変換なので，$\Delta(f^g) = (\Delta f)^g$ となり，このことから，

$$\Delta f = \lambda f \iff \Delta f^g = \lambda f^g \tag{7}$$

が成り立つ．すなわち，固有空間 $V_\lambda$ は $O(3)$ 不変な部分空間となる．実は，$V_\lambda \neq \{0\}$ のとき，$O(3)$ の $V_\lambda$ における表現は既約である．

いま，代数的直和

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} V_{\lambda(k)} \subset C^\infty(S^2) \tag{8}$$

を考えよう．(8) を $L^2$ 位相で完備化すると

$$L^2(S^2) = \sum_{k=0}^{\infty}{}^{\oplus} V_{\lambda(k)} \tag{9}$$

が成り立つ．(9) はユニタリ表現 $L^2(S^2)$ の既約分解を与える．一方，(8) を $C^\infty$ 位相で完備化すると $C^\infty(S^2)$ と一致するというのが球面調和関数展開 (6) に他ならない．

このようにして球面調和関数による展開の表現論的解釈が得られた（(5) 参照）．この古典的な例については河添氏の入門書[2)] が読みやすい．

### 3.3 $SO(2,1)$ と一葉双曲面・二葉双曲面

前項の結果を，二次曲面

$$M_+ : x^2 + y^2 - z^2 = 1 \tag{10}$$

$$M_- : x^2 + y^2 - z^2 = -1 \tag{11}$$

に拡張してみよう．$\mathbf{R}^3$ 上のミンコフスキー計量 $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$ を $M_+$ や $M_-$ に制限すると，$M_+$ にはリーマン計量，$M_-$ にはローレンツ計量が入る．$M_+$ は 2 次元双曲空間，$M_-$ は 2 次元ド・ジッター空間である．

球面 $S^2$ と異なり $M_\pm$ はコンパクトではない．また $M_+$ 上ではラプラシアン $\Delta$ は楕円型微分作用素であるが，ド・ジッター空間 $M_-$ 上では $\Delta$ は双曲型になる．このように，大域解の空間

$$V_\lambda^\pm = \{\varphi \in C^\infty(M_\pm) : \Delta\varphi = \lambda\varphi\}$$

が有限次元になる十分条件はいろいろな意味で崩れてしまう．実際，任意の複素数 $\lambda$ に対して大域解の空間 $V_\lambda^\pm$ は無限次元である．しかし，$S^1$ や $S^2$ の場合と同様に次の展開定理が成り立つ．

**定理 3.1**　$M_\pm$ 上のコンパクト台をもつ任意の $C^\infty$ 級関数はラプラシアンの（実固有値に対する）固有関数で展開できる．

定理 3.1 は $M_\pm$ 上の関数が $M_\pm$ 上の「基本的な関数」によって展開できることを主張している．なお，$M_+$ 上の関数の固有関数展開では，連続スペクトラムのみが現れる（$\mathbf{R}$ 上のフーリエ変換を連想されるとよい）．一方，$M_-$ 上の関数の固有関数展開では，連続スペクトラムと離散スペクトラムの両方が現れる．

次に，定理 3.1 の群論的な意味を考えよう．球面 $S^2$ には直交群 $O(3)$ が等長変換として作用したが，この一般化として，符号 $(2,1)$ の不定値直交群

$$O(2,1) = \{g \in GL(3, \mathbf{R}) : {}^t g I_{2,1} g = I_{2,1}\}$$

の $\mathbf{R}^3$ への作用を考えてみよう．ここで $I_{2,1}$ は $1, 1, -1$ を対角線成分とする対角行列である．群 $O(2,1)$ の作用は超曲面 $M_+$ や $M_-$ をそれ自身にうつす．このとき，$O(2,1)$ は $M_\pm$ に計量を保つ変換として作用するので (7) が任意の $g \in O(2,1)$ に対して成り立つ．すなわち，$V_\lambda^\pm$ は $C^\infty(M_\pm)$ の $O(2,1)$ 不変部分空間である．さらに，次の定理が成り立つ．

**定理 3.2** ほとんどすべての $\lambda \in \mathbf{C}$ に対して，群 $O(2,1)$ は無限次元ベクトル空間 $V_\lambda^\pm$ に既約表現として作用する．

従って，定理 3.1 は $L^2(M_\pm)$ を表現の最小単位である既約表現で分解する定理とみなすこともできる．

この節で述べた例は群多様体や対称空間上で非可換調和解析の理論として，Gelfand, Harish-Chandra, 大島利雄氏等によって 1950 年代 ～ 1980 年代に推し進められた．

## 4. 対称性の破れと分岐則

再び小林氏の文章を引用しよう．「ある意味では，分子はこれ以上分解できない最小単位である．しかし，分子は原子が結びついたもの，原子は素粒子が結びついたものと考えることもできる．このように，見方を変えると，これ以上分割できないと思われていた「最小単位」をさらに分割できることがある．**（離散的）分岐則の理論の本質**は，これ以上分割できないものをさらに分割するための**『良い視点』を提供することにある**[5,8]．」

既約表現 $\rho$ は群の表現としては「最小単位」のものである．$\rho$ を部分群に制限してみると，その部分群の表現としては，もはや $\rho$ は「最小単位」とは限らない．従って $\rho$ をさらに分解するという問題が考えられる．一般に，群の表現 $\rho$ が部分群の表現としてどのように分解するかを記述する公式を**分岐則**という．

分岐則を理解すること (**branching problem**) は表現論の基本的な問題である．テンソル積表現の分解，コンパクトリー群の指標公式，量子物理における対称性の破れの記述，テータ対応（保型形式の整数論）などは，すべて分岐則という一般の問題の特別な場合として捉えることができる．

分岐則の問題の難しさは $G$ が単純リー群の場合に集約される．例えば $(G, G') = (SL(3,\mathbf{C}), SL(3,\mathbf{R}))$ といった比較的小さな群の組の場合であっても分岐則における既約表現の重複度が無限になるなど病的な現象が生じる．ユニタリ表現に対する一般の分岐則は非常に難解であり，1990 年代初頭までユニタリ表現の分岐則の研究は冪零リー群や最高ウェイト表現など，特別な場合にしか行われていなかった．

1990 年代の半ばに小林俊行氏はこの難解な分野に大きなブレークスルーをもたらした．特に離散的分岐則の三部作[3]で簡約リー群の分岐則の研究を一般的な設定で切り拓き，とりわけ，“best-posed” な分岐則として admissible restriction という概念を導入した．その基本定理の一つを述べよう．

$n$ を簡約リー群 $G$ に含まれる極大トーラスの次元とするとき，表現 $\rho$ から定まる $\mathbf{R}^n$ の錐 $A(\rho)$ と部分群 $G'$ によって定まる $\mathbf{R}^n$ の錐 $B(G')$ が分岐則の形を以下のように規定する．

**定理 4.1**（小林，1998[3]） $\rho$ を $G$ の既約ユニタリ表現とし，$G'$ を $G$ の部分群とする．

$$A(\rho) \cap B(G') = \{0\}$$

ならば，制限 $\rho|_{G'}$ の分岐則には連続スペクトルは現れず，各既約表現の重複度は有限である．

$G'$ が $G$ の極大コンパクト群の場合は $B(G') = 0$ となり，定理 4.1 の仮定は自動的にみたされる．このときの定理 4.1 は Harish-Chandra の基本定理に相当する（この定理によって解析的な概念であるユニタリ表現が代数的な概念である $(\mathfrak{g}, K)$ 加群によっても研究可能になり，代数的表現論の強力な理論が発展した）．小林氏が切り拓いた定理 4.1 の枠組みの中で，同氏に引き続き，Gross–Wallach, Huang–Vogan, Duflo–Vargas, Speh, Lee–Loke 等による分岐則の研究が 1990 年代半ば以降，急速に発展している．

## 5. 極小表現

「分解」という観点からは既約表現が最小のものであるが，「構成」という観点もこめて，さらに根源的なものを探せば，本当に根源的な表現は実はごく少数しかない．例えば，次の定理が知られ

ている．

**定理 5.1**（Vogan, 1986[11]） $SL(n,\mathbf{F})$ ($\mathbf{F}=\mathbf{R},\mathbf{C},\mathbf{H}$) の既約ユニタリ表現は「基本操作」を繰り返せば，すべて1次元ユニタリ表現から得られる．

ここでの「基本操作」とは，誘導，コホモロジー的誘導，内積の解析接続を意味する．

しかし，これは A 型の群である $SL(n,\mathbf{F})$ の特殊性によるものである．実際，他の多くの単純リー群に対しては，1次元表現からの基本操作だけでは既約ユニタリ表現を全部尽くすことはできない．言いかえると，ユニタリ表現の「源流」と位置づけられる表現の中に無限次元のものも存在する．

**極小表現**は源流に位置づけられる無限次元表現の典型例である．C 型の群である $Sp(n,\mathbf{R})$ の二重被覆群の Weil 表現は古くから研究されている極小表現であり，この一つの表現だけで一冊の本になる位，豊富な内容をもつ表現である．一方，D 型の群である $O(p,q)$ の極小表現は，小林俊行氏による膨大な研究（この数年間に発表された論文だけでも 500 ページを超えている）によって，解析的にも幾何的にも非常に豊かな内容を含んでいることが明らかになってきている．例えば，D 型の極小表現は表現論の手法による構成だけでなく，全く異分野の数学に出現することが発見された．その一つが以下の定理である：

**定理 5.2**（小林–Ørsted, 2003[7]） 1) 任意の擬リーマン多様体に対して，その共形変換群の無限次元表現を山辺作用素を用いて一般的に構成することができる．
2) 偶数次元の擬リーマン空間形にこの構成を適用すると極小表現が出現する．

与えられた表現に不変なヒルベルト構造を入れる（ユニタリ化する）という表現論の問題は，偏微分方程式における新しい問題を提起する．その一例として，$\mathbf{R}^{p+q}$ における定数係数の**ウルトラ双曲型方程式の解の共形不変量**は，このような問題意識によって発見され，佐藤超関数のアイディアを用いて具体的に構成された[7]．

一方，幾何的な「裏返し」に対応するユニタリ作用素は，C 型の群の極小表現（Weil 表現）の場合には $\mathbf{R}^n$ のフーリエ変換となることが知られており，極小表現は「フーリエ変換」という作用素を発見する表現論的手法を与えているとも解釈できる．実際，D 型の場合の極小表現を用いて「**2次錐上のフーリエ変換**」に相当する性質の良い積分作用素が発見されている[6]．

### 参考文献


1) 平井武，『線形代数と群の表現 I, II』，すうがくぶっくす 20, 21, 朝倉書店，(2001).
2) 河添健，『群上の調和解析』，すうがくの風景，朝倉書店，(2000).
3) T. Kobayashi, Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups, *Invent. Math.* **117** (1994), 181–205; Part II: *Annals of Math.* **147** (1998), 709–729; Part III: *Invent. Math.* **131** (1998), 229–256.
4) 小林俊行，「シルエットから見る」，『現代数学のあゆみ 4』，日本評論社，1992, pp.46–51.
5) 小林俊行，「半単純リー群のユニタリ表現の離散的分岐則の理論とその展開」，数学 **51**, 岩波書店 (1999), 337–356; 英訳，*Amer. Math. Soc.* (2005).
6) T. Kobayashi and G. Mano, The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p,q)$, to appear in *Memoirs of Amer. Math. Soc.* 171 pages. (arXiv: 0712.1769v1).
7) T. Kobayashi and B. Ørsted, Analysis on the minimal representations of $O(p,q)$, Part I, II, III, *Adv. Math.*, **180**, 486–512, 513–550, 551–595, (2003).
8) 小林俊行–大島利雄，『リー群と表現論』，岩波書店，(2005).
9) 熊原啓作，『行列・群・等質空間』，日評数学選書，日本評論社，(2001).
10) 辰馬伸彦，『位相群の双対定理』，紀伊國屋数学叢書，**32**, (1994).
11) D. Vogan, The unitary dual of $GL(n)$ over an archimedean field, *Invent. Math.*, **83** (1986), 449–505.


（せきぐち・ひでこ，東京大学大学院数理科学研究科）

# 無限次元微積分



高岡 秀夫

## 1. はじめに

微分積分学の基礎は 17 世紀後半にニュートン (Isaac Newton), ライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz) によって創められ, 現在我々が習う微分積分学のスタイルは 19 世紀にコーシー (Augustin Louis Cauchy) によって成し遂げられた．微分法は局所的変化を表現することから, 曲線の接線や局面の接平面などと関係し, 積分法は大域的集積という性質を持ち, 曲線の長さや曲面の面積を与える．その誕生の歴史は, 惑星運動の法則や万有引力の理論の数学的解明を背景とする．一変数やそれ以上の有限変数の微分積分法では, このような幾何学的イメージが理解を助ける．本稿では, 関数解析学におけるバナッハ空間の理論により無限変数の微分積分学が, 有限変数の場合を含めて統一的な表現を与えることを紹介する．

関数解析学は, 関数を集合の点として捉え, この集合の中で関数の収束といった極限を取り扱い, 特に, 微分積分法は関数写像から導かれる作用素の理論として帰着される．その意味では, コーシーによる, 極限・収束の概念を出発点とした微分積分法が関数解析学においても自然に受け継がれているように見える．関数解析学の歴史は浅く, 19 世紀初めのフーリエ級数の開発, それを正当化するためのルベーグ積分論の整備 (無限次元空間における正規直交規定展開), そしてルベーグ積分論を根幹としたバナッハ空間の理論へと拡がる．特に, 20 世紀前半に, バナッハ (Stefan Banach), ヒルベルト (David Hilbert), シュワルツ (Laurent Schwartz) らに代表される数学者によって始められたバナッハ空間における関数解析学は, 微分方程式を研究対象として不可欠な現代解析学の理論となった．

## 2. 1 次近似と全微分

まず, 1 変数の実数値関数 $y = f(x)$ について通常の微分の定義を振り返ろう．$I$ を $\mathbf{R}$ 上の開区間とする．$f$ が $a \in I$ において微分可能とは, 極限

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{1}$$

が存在するときである．さらに, この極限値を $f$ の $a$ における微分係数と言い, $f'(a)$ あるいは $\frac{df}{dx}(a)$ と記す．$I$ の各点で微分係数が存在するとき, 関数 $a \to f'(a)$ を $f$ の導関数と言うのであった．次に, 微分係数 $f'(a)$ の定義を書き直してみよう．$f$ が $a$ において微分可能であるとき, $x = a + h$ と置き,

$$\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$$

と定義すると, 微分可能であることと

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon(h)}{h} = 0$$

を満たすことは同値である．ランダウ記号を用いれば, これは

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \tag{2}$$

と書ける．ここで，記号 $f(x) = o(g(x))\ (x \to a)$ とは $a$ の近くにおいて，$|f(x)|$ は $|g(x)|$ に比べて非常に小さいこと（無限小）を意味し

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

で定義される．このとき，$f$ は $g$ より高次の無限小であると言う．つまり，$f$ が $a$ で微分可能であることは，$h \to 0$ のときの関数 $f(a+h) - f(a)$ の変化量が

$$f'(a)h + o(h)$$

として，$h$ の 1 次式（直線）とそれよりも高次の無限小の量の和として表現することができることと理解できる．

一変数の微分法をユークリッド空間における多変数写像に拡張しよう．$U$ を $\mathbf{R}^n$ の開部分集合，$V$ を $\mathbf{R}^m$ の部分集合とする*1)．$U$ で定義された写像 $f = (f_j)_{1 \leq j \leq m}$ が $a \in U$ で微分可能とは，ある $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ が存在して

$$f(a+t) = f(a) + At + o(|t|), \quad t \in \mathbf{R}^n \quad (3)$$

が成り立つことと定義する．このことを**全微分可能**，あるいは**フレッシェ微分可能**とも言う．特に，$df(a) = A$ によって微分を定めると，その行列の成分は偏微分係数を用いて

$$a_{ij} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \quad (4)$$

によって与えられる．幾何学的には，(3) の右辺は，$h \in \mathbf{R}^n$ の 1 次形式（超平面）と高次の無限小 $o(|h|)$ の和であり，$a$ で微分可能とは $f$ のグラフ

$$\left\{ {}^t(x, f(x)) \in \mathbf{R}^{n+m} \mid x \in U \right\}$$

上の点 $(a, f(a))$ において接超平面が描けることを意味する．一変数の場合は微分係数 (1) の存在と (2) は同値であったが，2 変数以上の微分法においては，偏微分係数の存在 (4) から (3) が一般には成り立たないことが知られている．つまり，多変数関数において，微分可能というのは偏微分可能よりも強い条件と言える．

*1) 実数を縦に並べた実数ベクトル空間とする．

## 3. 無限変数への拡張

これまでの説明では $n$ 変数関数の微分を一変数での記号を用いて表現した．(2), (3)，どちらにも言えることは，変数ベクトルを $x$ から $x+h$ まで変化させたときの関数 $f$ の変化量が $h$ の 1 次式とそれより高次の無限小の和で書き表せることである．この方針は，変数が無限の関数（写像）に対しても同様に拡張できる．そのためには，無限小に関する極限と収束の概念を定義する必要があり，それにはノルムによって位相を備えたバナッハ空間の理論が好都合である．

はじめに，$X$ はノルム $\|\cdot\|_X$ を持つノルム空間とする．ノルム $\|\cdot\|_X$ を距離の法として，$X$ がバナッハ空間とは，$X$ 上の列 $\{x_n\}$ がコーシー列ならば，$X$ の中に必ず収束することと定義する．つまり

$$\lim_{n,m \to \infty} \|x_n - x_m\|_X = 0$$

ならば，ある $x_\infty \in X$ が存在して

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_\infty\|_X = 0$$

が成り立つことであり，このような空間は**完備**であると言われる．例えば，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ は通常のノルム（距離）に対して完備であり，その完備性は実数体の連続性と同等である．

無限次元バナッハ空間の代表的な例としては，コンパクト集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上の連続関数空間 $C(\Omega)$

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} |f(x)| \quad (5)$$

や，$1 \leq p \leq \infty$ に対し，ルベーグ積分関数空間 $L^p(\mathbf{R}^n)$

$$\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} = \left( \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} = \text{ess.} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |f(x)|$$

が挙げられる．このような関数空間 $V$ に対しては，集合の元は関数そのものを表す．

次に，有界線形作用素について説明する*2)．

*2) 関数空間における微分積分法による演算に代表されるように，ノルム空間における写像は一般に作用素と呼ばれる．特に，スカラー値（係数体）に対応させるものを**汎関数**と言う．

$X, Y$ をバナッハ空間とし，$\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ はそれぞれの空間のノルムとする．$X$ から $Y$ への線形写像 $A$ が有界線形作用素であるとは，ある正数 $M$ があって，任意の $x \in X$ に対して

$$\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X$$

が成り立つことと定義する．ノルム空間の線形作用素に対する，有界性と連続性の同値から，$A : X \to Y$ は連続である．$X$ から $Y$ への有界線形作用素全体を $B(X,Y)$ と表すと，これも線形空間であり

$$\|A\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

をノルムとしてバナッハ空間となる．

ここでバナッハ空間での微分法を定義する．$X, Y$ をバナッハ空間とし，写像 $f : X \to Y$ が $a \in X$ で微分可能とは，$X$ から $Y$ への有界線形作用素 $A$ があって，$Y$ において

$$f(a+t) = f(a) + At + o(\|t\|_X) \qquad (6)$$

が成り立つことと定義し，$A = df(a)$ を $a$ における微分と呼ぶ[*3]．なお，任意の $y \in X$ に対して $Y$ における極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+hy) - f(a)}{h}$$

が存在するとき，$f$ は $a$ で**方向微分可能**，あるいは**ガトー微分可能**であると言い，上の極限を $df(a, y)$ と書く．フレッシェ微分可能ならばガトー微分可能を満たすことは容易に分かるが，その逆は一般に成り立たず，例えば $df(a, y)$ が $y$ について有界線形作用素ならば微分可能（フレッシェ微分可能）であることが知られている．

これまでに定義したことを $X = \mathbf{R}^n, Y = \mathbf{R}^m$ の場合に適用すると，(1) と (6) は等しく，無限次元バナッハ空間における微分は無限行無限列の行列演算を行っていると言える．1 次近似は，有限変数で写像の性質を特徴付ける理論，特に高次近似（テイラーの定理），陰関数定理，逆関数定理などの諸議論が無限次元バナッハ空間において自然に拡張されることを示唆していることに注意する．

*3） 有界線形作用素 $A$ は $a \in X$ に依存し定義される．

## 4. 汎関数の極値問題

微分積分法の基本的な問題は，関数の極値問題であろう．ユークリッド空間を定義域とし実数値を値域とする関数の微分が，関数の極大・極小を調べるのに用いられるように，バナッハ空間を定義域とし実数を値域とする汎関数の極値問題には，バナッハ空間上の**微分法**が使われる．次の問題を検討しよう．

> 平面上の原点 $(0,0)$ と点 $(1,1)$ を結ぶ滑らかな線分で，その長さが最小のものを求めよ．

これを数式的に表現すると，「束縛条件 $f \in C^1([0,1])$，$f(0) = 0$，$f(1) = 1$ の下に，汎関数

$$F(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt \qquad (7)$$

を最小にする関数 $f$ を求めよ」ということである．線分の両端点を与えて線分が最小となるこの問題のような，束縛条件の下で汎関数の最大値・最小値を数学的に求めることを変分法と言い，特に関数解析学によって 20 世紀以降盛んに研究されている分野である．

上の問題の解は，図形的には原点と $(1,1)$ を結ぶ直線分であることは明らかである．では，(7) は変分法によってどのように解決されるか，束縛条件に対して，関数空間

$$X = \{f \in C^1([0,1]) \mid f(0) = 0,\ f(1) = 1\},$$

ノルム

$$\|f\|_X = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| + \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$$

を定義すると，$X$ はバナッハ空間となる．定義に従い (6) の微分演算を行うと

$$F(f) = F(f_0) + dF(f_0)(f - f_0) + o(\|f - f_0\|_X) \qquad (8)$$

となる．ここに $dF(f_0)$ は有界線形作用素で与えられ，$g \in X$ に対して

$$dF(f_0)g = \int_0^1 \frac{f_0'(x)g'(x)}{\sqrt{1 + (f_0'(x))^2}}\, dx \qquad (9)$$

と表すことができる．このとき，$F(f)$ が $f=f_0$ で最小値を取れば，それは極小値でもあり，(6) から $dF(f_0)=0$ を満たす．つまり，任意の $g\in C^1([0,1])$，$g(0)=g(1)=0$ に対して，$dF(f_0)g=0$ を与える $f_0\in X$ が求める関数となり得る．このような，汎関数の微分を 0 にする点 $f_0$ を**臨界点**と言い，そのときの汎関数の値を**臨界値**と言う．ところで，

$$h(x)=\frac{f_0'(x)}{\sqrt{1+(f_0'(x))^2}}$$

に対し，

$$g(x)=\int_0^x h(t)\,dt-x\int_0^1 h(x)\,dx$$

は $g\in C^1([0,1])$，$g(0)=g(1)=0$ を満たし，$dF(f_0)g=0$ に代入することにより

$$\int_0^1 |h(x)|^2\,dx=\left(\int_0^1 h(x)\,dx\right)^2$$

を得る．このとき，

$$\int_0^1\left|h(x)-\int_0^1 h(t)\,dt\right|^2 dx=0$$

となる．明らかに $h$ は定数関数であり，$f$ の束縛条件に注意すると，変分問題の解として直線分を表す $f_0(x)=x$ が得られる．

さて，上で臨界点であることは極小点の必要条件であり，その十分条件は与えていない．極値が極大値か極小値のいずれかの判定は議論が別途必要である．今回の場合は，(8) の無限小部分 $o(\|f-f_0\|_X)$ の主要部が

$$\int_0^1\frac{(f'(x)-f_0'(x))^2}{\sqrt{1+(f_0'(x))^2}}\,dx$$

によって与えられ，その非負性から臨界点 $f_0$ は極小値であると結論付けることができる．

汎関数 (7) の微分 $dF(f_0)$ をさらに考察してみよう．(9) が任意の $g\in C^1[(0,1]]$，$g(0)=g(1)=0$ で成り立つならば，部分積分により $f=f_0$ は

$$\int_0^1 g(x)\frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\,dx=0$$

を満たすことは明らかである．このとき，

$$\frac{d}{dx}\frac{f'}{\sqrt{1+(f')^2}}=0, \qquad (10)$$

あるいは同一式

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial\sqrt{1+(f')^2}}{\partial f'}-\frac{\partial\sqrt{1+(f')^2}}{\partial f}=0$$

を $F(f)$ に対するオイラー–ラグランジュ方程式と言う．解析力学における最小作用の原理（ハミルトンの原理）の観点では，$f=f_0$ が (10) の解であると解釈される．

## 5. 変分法と微分方程式の弱解

変分法と解の関係をさらに考察してみよう．いま，$\Omega$ は $\mathbf{R}^n$ の有界開集合として，ポアソン方程式

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x), & x\in\Omega,\\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

を考える．第 1 式はガウスの法則による電荷と電位の関係式であり，第 2 式は境界に電位（この場合はゼロ値）を与えることを意味する．この微分方程式は，場の領域 $\Omega$ 内に与えられた電荷密度関数 $f$ （実数値）に対して電位関数 $u$ を決定する電磁気学の基本方程式である．仮に $f\in C(\Omega)$ としても，特殊な $\Omega$ の場合を除いて，一般に求積法で解 $u$ を求めることはできない．$f\in L^2(\Omega)$ に対し，静電荷エネルギーを基にした汎関数

$$G(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u(x)|^2\,dx-\int_\Omega f(x)u(x)\,dx$$

の極値問題を考えよう（ディリクレの原理）．解の変分法による特徴付けを説明するために，汎関数 $G(u)$ を鑑みて，1 回連続微分可能かつ $\Omega$ 上コンパクト台を持つ実数値関数を 2 乗積分の下で完備化したソボレフ空間 $H^1(\Omega)$ を導入する．$u\in H^1(\Omega)$ であるとは，$u\in L^2(\Omega)$ かつ $\nabla u\in L^2(\Omega)$ と定義する*4)．$H^1(\Omega)$ 上のノルムを

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}=\|u\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

*4) $\nabla$ はベクトル演算子 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ を表す．

で定める．$L^2(\Omega)$ 空間の内積を

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)v(x)\,dx$$

とおくと，空間 $H^1(\Omega)$ は

$$(u,v)_{H^1(\Omega)}=(u,v)+(\nabla u,\nabla v)$$

を内積としてヒルベルト空間と呼ばれる．また，$H_0^1(\Omega)$ を $\Omega$ にコンパクト台を持つ無限回連続微分可能な関数空間 $C_0^\infty(\Omega)$ のノルム $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ による閉包を表す．

さて，ポアソン方程式と汎関数 $G(u)$ の関係を考察しよう．$X=H_0^1(\Omega)$ として，$G$ は $X$ から実数値への汎関数であることが分かる．バナッハ空間上の微分を用いることにより，任意の $v\in H_0^1(\Omega)$ に対し，

$$\begin{aligned}dG(u)v &= \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx\\ &\quad -\int_\Omega f(x)v(x)\,dx\\ &= (\nabla u,\nabla v)-(f,v)\end{aligned}$$

となる．$u=u_0\in H_0^1(\Omega)$ が汎関数 $G(u)$ を最小にするとき，それは極小点でもあるから，任意の $v\in H_0^1(\Omega)$ に対して $dG(u_0)v=0$ となる．このとき，最小点は，解析力学における静電荷エネルギー分布の最小値問題として意味付けされる．任意の $v\in C_0^\infty(\Omega)$ に対し，$dG(u)v=0$ が成り立つとき，$u$ をポアソン方程式の**弱解**，あるいは**超関数解**と言う．明らかに $C_0^\infty(\Omega)\subset H_0^1(\Omega)$ であるから，汎関数 $G(u)$ の最小点 $u=u_0$ はポアソン方程式の弱解となる．

$H_0^1(\Omega)$ 上の弱解については，一般に2階以上の微分階数は期待できないが，ポアソン方程式に対しては，偏微分方程式論の正則性定理によって，2階微分まで込めて $L^2(\Omega)$ の関数空間に属することを導くことが可能である．

汎関数 $G(u)$ の変分法に対する最小値の存在証明について詳細は述べないが，その証明には，$G(u)$ が下有界

$$\inf_{u\in H_0^1(\Omega)} G(u)>-\infty$$


理工系数学の基礎・基本⑩
**代数学の基礎・基本**
織田　進著／A5判・定価1,995円
大学教育・工学・情報系学部学生が初めて学ぶ際に必須な群・環・加群・体などの代数的構造を基礎から丁寧に説き起し、分量を抑えつつも自己完結的になるよう配慮する。抽象性のため当惑することのないよう解説に工夫を凝らす。

経済・統計分析入門2
**実例とEXCELによる統計学トレーニング**
片山直也著／A5判・定価2,520円
統計学の基礎的な理論と実際の使用法を分かりやすく解説した入門書。大学初年級程度の数学を用いて理論面を説明するとともに、EXCELを用いたデータ処理の基本的な方法を紹介。通年および半期の講義用テキストとして使用可能。

**佐藤・テイト予想と数論**
平松豊一・斎藤正顕著／A5判・定価2,730円
佐藤・テイト予想の総合報告書。歴史的概観を与えた後、ラマヌジャンの関数、マースの波動形式、ヒルベルトモジュラー形式の場合を扱う。更にラマヌジャングラフや符号理論との関連に触れ、テイラー等による証明の概略を述べる。

**Quick演習・微分積分**
成田清正・野澤宗平著／A5判・定価1,890円
高校で微分積分を十分に学習していない学生を念頭において構成された大学初年級向け演習書。例題→要点→解答→注意→類題の流れを1頁にまとめ、このパターンを反復することにより基本原理と基本計算が自ずとマスターできる。2色刷

★価格は税込

発行＝牧野書店　114-0024東京都北区西ヶ原3-60-18　電話(03)3949-2344　http://www.makinoshoten.co.jp/
発売＝星雲社　112-0012東京都文京区大塚3-21-10　電話(03)3947-1021　FAX(03)3947-1617

であることと，ヒルベルト空間 $H_0^1(\Omega)$ の弱点列コンパクト性（ボルツァノ–ワイエルストラスの定理を無限次元空間に拡張した概念）から，解の近似列を構成することによって正当化できる．$G(u)$ の下有界性の証明には，第 1 項 $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$ にポアンカレの不等式

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad C>0,\ u\in H_0^1(\Omega)$$

を適用し，第 2 項にコーシー–シュワルツの不等式

$$\left|\int_\Omega f(x)u(x)\,dx\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

を用い，さらにヤングの不等式を組み合わせることによって成し遂げられる．最小値の一意性は，汎関数 $G(u)$ の狭義凸性

$$G((1-t)u+tv) \leq (1-t)G(u)+tG(v),$$
$$u,v\in H_0^1(\Omega), \quad 0\leq t\leq 1$$

（等号は $u=v$ の場合に限る）によって得られる．

逆に，$u=u_0$ が 2 階微分まで込めて $L^2(\Omega)$ に属しポアソン方程式を満たすならば，部分積分により $dG(u_0)=0$ となり，汎関数 $G(u)$ の極小値を与えることが容易に分かる．このように，弱解の概念を通して汎関数 $G(u)$ の極値問題とポアソン方程式の解は対応が付けられる．

## 6. おわりに

関数解析学は微分方程式の研究に欠かせない道具となっている．本稿では，ポアソン方程式の解をバナッハ空間における微分を用いて述べた．既知関数 $f$ としてはルベーグ関数空間 $L^2(\Omega)$ に限った一端を紹介したが，弱解の概念を使えば関数の概念を広げて超関数のクラス $f\in H^{-1}(\Omega)$ でも一意解 $u\in H_0^1(\Omega)$ を構成することも可能である．より詳しい解説は文献 1, 3) で与えられている．

ポアソン方程式など，無限次元空間上の微分方程式は偏微分方程式である．代表的な偏微分方程式である，熱伝導方程式，波動方程式に対する変分法の解説は文献 1, 2, 6) を参照していただきたい．また，近年は非線形の偏微分方程式に対しても関数解析学の理論が有効に使われている．変分法について言えば，光ソリトンの伝播を記述する非線形シュレディンガー方程式のソリトン解を構成する道具として使われる．非線形偏微分方程式に対する関数解析学の専門書として文献 5, 9, 10) を参照されたい．

### 参考文献


1) ハイム・ブレジス，藤田宏（監訳），小西芳雄（訳），『関数解析』，産業図書，1988.
2) 溝畑茂，『偏微分方程式論』，岩波書店，1965.
3) 宮島静雄，『ソボレフ空間の基礎と応用』，共立出版，2006.
4) 谷島賢二，『ルベーグ積分と関数解析』，朝倉書店，2002.
5) 堤誉志雄，『偏微分方程式論—基礎から展開へ』，培風館，2004.
6) L.C. Evans, "Partial differential equations", American Mathematical Society, 1998.
7) D. Gilbarg and N.S. Trudinger, "Elliptic partial differential equations of second order", Springer, 1983.
8) E.M. Stein, "Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals", Princeton University Press, 1993.
9) M. Struwe, "Variational methods", Springer, 1990.
10) T. Tao, "Nonlinear dispersive equations, local and global analysis", American Mathematical Society, 2006.
11) K. Yosida, "Functional analysis", Springer, 1980.



（たかおか・ひでお，北海道大学大学院理学研究院）

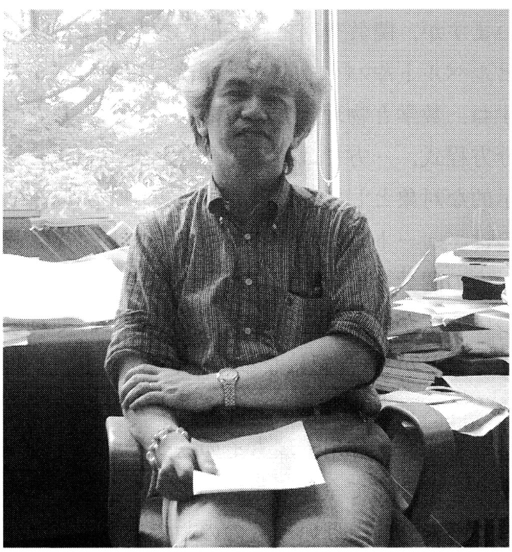
# “無限”を垣間見る楽しみ

河 東　泰 之（聞き手：編集部）

## 1. 無限次元と関数解析 —研究状況や教育事情など

**——今回のテーマである“無限次元”を扱う分野の最近の研究事情（国内外を含めて）や教育現場での状況などをお聞かせせいただけますでしょうか．**

狭くとってみて，関数解析自体を研究している人は全体的に少ないですね．アメリカやフランスには一部いますが，日本ではかなり少ないと思います．一方で，道具として関数解析を使っている人はたくさんいます．解析学はもちろん幾何学でも多様体上の解析などで使われています．ですので，ある側面が大きく発展しているとか，皆が集中的にやっているとか，そういうことはあまりなく，それぞれ自分の研究に役に立つところを使っているという感じですね．物理などではストリング理論でも使われますし，ヒルベルト空間が自然に出てくる話にはほとんど全部と言っていいくらい使われます．



河東泰之氏．

また，学生の状況は人によって違いますが，物理学科を出た人もいますし，完全に抽象的に関数解析をやりたい人や非可換幾何をやりたい人など様々です．ただ，教育現場の状況として，バナッハ空間やヒルベルト空間の抽象論自体は，有限次元のことやルベーグ積分，フーリエ変換のことなど知らなくても論理的にはできるわけですが，いろいろ見ているとそういう具体例のレベルで分からなくなってしまっているケースがよく見受けられます．さすがに行列を知らない人はいませんが，よく見ていると対角化などが怪しい人もいますし，最近の数学科の傾向でとくに不思議に感じるのは，フーリエ変換を習ったことがない人が多いんですね．超関数の話でも，フーリエ変換やルベーグ積分などをあまり知らずにいきなり抽象的なことをやろうとするので，当然それはつまづきますよね．学生に，無限次元バナッハ空間の例を挙げて下さ

い，と言うと一つも挙げられないという例もあります．抽象的なことは形の上ではいくらでもできますが，やはり有限次元などでの具体例をよく知らずに進んでしまうのは危険だと思います．

## 2. 初学者が出会う“無限”

**――学部の初めでは，線形代数での行列や微積分での $\epsilon$-$\delta$ 論法などで，“無限”という概念に遭遇すると思いますが，うまく理解できるポイントなどがありましたらアドバイスをお願い致します．**

そうですね．微積分の場合は，直観的なイメージというのは高校の頃からやっていますから，ある程度は頭の中にはあるわけですよね．ですので，大学の最初で遭遇する問題点というのは，何もわからないというのとはちょっと違うと思います．むしろイメージがないわけではなくて，頭にはあるのだけれどうまく対応しない，というのが本当ではないかと思います．それにはやはり抽象的な論理というものに慣れていってもらうしかありません．抽象的な概念が自分のイメージとどのように対応しているのかをよく考える，と言うことしかできないですね．

## 3.“無限”を見るには<br>―イメージを描いてみる

**――先ほどの学部初等の話と関係しますが，“無限”をイメージするには，例えばどういったコツや方法があるでしょうか．**

そうですね．絵は常に描いたほうがよいと思いますね．大学院のセミナーでも，抽象的な話が出てきた場合に，何か絵を描けばずっと分かりやすくなってよいと思うときがあるのですが，なかなか描かないという傾向を感じます．点でも何でもいいから，心に思うことを絵に表してみればいいと思うのですが…．本当の“無限”は絵に描けませんが，それでも絵を描くとそれなりに分かったような気になるとは思うんですね．誰も“無限”を見ることはできませんが，見えたような気分になるような思い方や描き方はあると思いますから，そういうイメージを抱いていることは大切だと思います．

## 4. 無限次元の種類と歴史的な発展

**――“無限次元”は物理でも場の量子論などでよく出てきますが，数学との違いなども含めて，歴史的な発展や関係性などをお聞かせいただけますでしょうか．**

無限にもいろんな種類があって，大きな有限とあまり変わらないような話もたくさんあるわけですね．本当は“非常に遠くにあるもの”を“無限の彼方にある”と思ってしまうことで，簡単にできる程度の話もたくさんあります．無限次元でないと起こらないような現象も，例えば量子力学ならば交換関係などでいろいろ出てきますが，そういうもののように本当の無限次元でないと見えないものもあるわけですね．

また，歴史的な話でいうと，極限操作という意味ではニュートン，ライプニッツやフェルマー，もっと古くいけばアルキメデスの時代に遡ると思いますが，関数空間として出てきたのは20世紀，ヒルベルトやバナッハなどの時代になってからですね．数学と物理としてみるならば，一方では微分方程式，一方では量子力学として，それぞれ明示的な対象として出てきたわけです．関数そのものはニュートンの頃からありましたし，昔は一つ一つの関数を通して微分だとか極限を考えていたわけですが，それを無限次元の空間として対象にすることが20世紀になって確立され，1個1個でなくて大きな集合として見ることが発展してきたわけですね．作用素環もその一つです．一つ一つのものでなくて全体の集合の構造を考えることが有効であり，そういうものの中で無限次元というものが明確に現れてきたということですね．

## 5. 研究を始めたきっかけ

**――先生が作用素環の研究をするようになったきっかけをお聞かせ頂けますでしょうか.**

そうですね. 割と最初から無限次元のような話には興味をもっていましたし, 集合論なども初等的な話には昔から興味がありました. 子どもの頃の話だと, よく初等幾何学とか素数の神秘などに興味をもつ人が多いですが, 私の場合はそれとは違って, 最初から無限次元とか無限集合のことに興味がありました. ですので, 何かそれに関係した仕事をしたいと思っていました. ところが, 一方で専門を決めるときに日本ではそうしたことをテーマにしている人がいない状況でしたので, そこで作用素環というのが関数解析的なことで他分野とも関係していて, 荒木不二洋先生がいらっしゃったこともあってこの道に入りました. 今になってみると, 大きい有限からだんだん無限にいくのも重要だと思うのですが, やはり無限じゃないとつまらないという意識が強いですね. ですから, 最初から物理に興味があったわけではなくて, 数学の抽象的な問題に興味がありました. 学生のときは, それほど物理が自分たちの抽象的な世界と近いとは思っていなかったのですが, だんだんウィッテンなどの活躍もあって, 徐々に物理の世界がつかめてきたという感じですね.

## 6. "無限次元"のこれから

**――"無限次元"ないし"無限"は, 今後どのように広がっていくと考えられるでしょうか. また, 他分野への広がりなども今後どのような方向に進んでいきそうでしょうか.**

無限次元はあらゆるところに出てきますので, ほとんどすべてに関係があると言っていいと思います. 組合せ論的な, 離散的な場合は関係がうすいとは思いますが, それでもだんだん極限を大きくしていけば関係してきますし, 物理でも当然そうですし, そういう意味で基本的な道具としてすべてに関係するというのが一つですね. また, 物理との関係でいえば, 量子場の理論は数学的にやろうとすれば無限次元がたくさん出てきますから, そういうことをもっと将来的にきちんと数学としてやっていこうという状況でしょう. 非常に簡単なことでも, 関数が出てくればたちまち無限次元ですし, 写像でも同様です.

## 7. 伝えたいメッセージ

**――この分野へ進もうと考えている学生や後進の方へ, 何かアドバイスがありましたらメッセージをお願い致します.**

まず一つは, 自分が好きで面白いと思ったことをやっていくしかないと思います. 何が将来のびるかなんていうのは分からないですよね. 格好いい流行分野だと思ってやっても, 時代遅れになったり逆の場合もありますが, とにかく好きなことをやるしかないです.

あと一つは, 早い段階のうちから狭い範囲に絞ってしまうケースがよくありますが, 若いうちから興味の範囲が狭まってしまうのはよくないですね. 数学はいろんなところで関係していますから, 自分で限定せずに興味を広げていくことが大切だと思います.

**――本日は貴重なお話をお聞かせ下さり, 誠にありがとうございました.**

(2009年7月, 東京大学駒場キャンパス研究室にて)

(かわひがし・やすゆき, 東京大学大学院数理科学研究科)

# 「数理科学」は語る

## 30年前から現代へのメッセージ

細井　勉

1980年1月号

「無」という特集はできそうかと，当時の編集者から尋ねられ，面白そうだと思ったのを憶えています．数学では，20世紀の初頭に，空集合だけをもとにして数学の構造を作り上げていました．つまり，「無」だけから数学的なモノを作り出していたのです．他の分野で「無」をどう捉えているかと興味と期待を持ったものです．




特集の中の私のエッセイは，日本語についてで，「どこでも，誰も，何も，見なかった」という文の考察，つまり「無」の表現を考えるものでした．「どこでも」のような否定を期待する語を3つ並べて「見なかった」というただ1つの否定語で受けている構文に興味を持ったのです．同じ構文を持つ言語があることが，一層，私を惹きつけた要因ともなっていました．その頃，私は理数教育との関係で日本語を研究していました．そこでは，教育の現場での実践が課題でした．でも，実践は期待したほどには浸透しませんでした．その一因は，学生・生徒も，教師も，自分は日本語を知っていると思い込んでいたことにありました．その思い込みが誤解を生み出し，理数教育を妨げていたのです．この研究は，現在に至るまで，永く，続くことになりました．

「無」を人格化して面白がっていた作家に19世紀イギリスのルイス・キャロルがいます．一例は，「誰をも（nobody）見ない」を「Nobody（という人物）が見える」と曲解するものです．これは「無」にモノを見ていることになります．キャロルは数学教師でもありましたから，キャロルのnobodyの捉え方は数学的であると思えました．

特集から10年経った頃から，私個人としては，キャロルの「無」について数学的な考察を始めました．有名なチェシャ猫が姿を徐々に消した後に「にたにた笑い」を残すのは，実体を消去した後の「無」を論じていたのです．20世紀の数学の逆を行く面白さを感じました．同様に，蝋燭が消えた後の炎を論じながら，人の死後の魂について述べていたりもします．

そのようなことについての私の考察は「無」の特集から20年ほど経って，英文学の論文として完成しました．それは，キャロルの没後100年の時期のことで，その記念行事に参加する形で実現しました．

その後，キャロルの行列式論や選挙理論の論文の翻訳・解説をしたのですが，いわば無を見ることに発した研究が実をつけ始めた感じとなりました．キャロルの行列式論は，コンピュータとの関係からキャロルの時代よりも興味を持たれるようになっていました．選挙理論は小選挙区制の不公平さを論じていたのですが，ちょうど日本で小選挙区制が採用され，キャロルの主張の妥当性をあざやかに見せてくれました．

（ほそい・つとむ）

# 問題例で深める物理 Problem Answer Discussion 最終回

## 物理現象の次元性

香取 眞理・中野 徹

物理学でいう**実空間**とは，縦，横，高さの3つの方向を持つ3次元空間である．その中での現象を理解するのが物理学の本来の目的であるが，あえて3次元以外の空間を考えてそこでの物理現象を議論することがある．実は，興味深い物理現象は，**空間次元**とは別に，その**現象に固有な次元性**を有しているのである．「容器」である空間の次元が現象の持つ固有な次元より低ければ現象は強い制限を受け，その逆の場合は現象は自由に振舞う．空間の次元を変化させて考えることにより，物理現象の本性が浮き彫りになるのである．連載の最終回では，**ランダムウォーク**という簡単な確率模型と，流体における**乱流**という複雑現象を例にして，**次元**というものを考えてみることにしよう．

### 12.1 確率模型における次元性

#### 12.1.1 パスカルの三角形の一般化

表 12.1 は**パスカルの三角形**と呼ばれる**二項係数**の表である．ただし，各段には上から下に $t=0, 1, 2, \cdots$ と番号付けをし，横軸 $x$ を表の下に付けた．$-t \le x \le t$ の範囲で，$t$ が偶数のときは偶数の $x$ の上に，$t$ が奇数のときは奇数の $x$ の上に，それぞれ二項係数

$$Q^{(1)}(x,t) = {}_t\mathrm{C}_{(t+x)/2} = \binom{t}{(t+x)/2}$$

の値が記されている．値が記されていない点 $(x,t)$ では $Q^{(1)}(x,t)=0$ とする．すると，表 12.1 の

**表 12.1** パスカルの三角形．

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t=0$ | | | | | | 1 | | | | | |
| 1 | | | | | 1 | | 1 | | | | |
| 2 | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | |
| 3 | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | |
| 4 | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | |
| 5 | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 |
| $x$ 座標 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

各点の値は $Q^{(1)}(x,0)=\delta_{x0}$ という条件の下で，漸化式

$$\begin{aligned} Q^{(1)}(x,t+1) &= \sum_{x':|x'-x|=1} Q^{(1)}(x',t) \\ &= Q^{(1)}(x-1,t) + Q^{(1)}(x+1,t), \end{aligned}$$

$t=0,1,2,\cdots$ を解けば，逐次定められる．

この漸化式を次のように拡張すると，「パスカルの三角形の2次元版」が得られるはずである：

$$\begin{aligned} Q^{(2)}(\boldsymbol{r}=(x_1,x_2),t) &= \sum_{\boldsymbol{r}':|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|=1} Q^{(2)}(\boldsymbol{r}',t) \\ = Q^{(2)}((x_1-1,x_2),t) &+ Q^{(2)}((x_1+1,x_2),t) \\ + Q^{(2)}((x_1,x_2-1),t) &+ Q^{(2)}((x_1,x_2+1),t), \end{aligned} \tag{12.1}$$

$t=0,1,2,\cdots$．ただし，

$$Q^{(2)}((x_1,x_2),0) = \delta_{x_1 0}\delta_{x_2 0}. \tag{12.2}$$

表 12.2　問題 12.1 の解答．
「パスカルの三角形の 2 次元版」．

| | $t=0$ | $t=1$ | $t=2$ | $t=3$ |
|---|---|---|---|---|
| $Q^{(2)}$ | 1 | 1<br>1　1<br>1 | 1<br>2　2<br>1　4　1<br>2　2<br>1 | 1<br>3　3<br>3　9　3<br>1　9　9　1<br>3　9　3<br>3　3<br>1 |
| $q^{(2)}$ | 1 | 4 | 16 | 64 |

**問題 12.1**　漸化式 (12.1) を条件 (12.2) の下で解いて，$t = 1, 2, 3$ の $Q^{(2)}$ の値をすべて求めなさい．また，各時刻での総数 $q^{(2)}(t) = \sum_{\boldsymbol{r}} Q^{(2)}(\boldsymbol{r}, t)$ を求めなさい．

**解答**　$t = 1, 2, 3$ に対して，零でない $Q^{(2)}$ の値を表 12.2 に示した．また，一般に $q^{(2)}(t) = 4^t$, $t = 0, 1, 2, \cdots$ である．■

### 12.1.2 *d* 次元ランダムウォーク

2 次元正方格子上の原点 O $= (0, 0)$ に粒子を 1 つ置く．この粒子を，各時間ステップ $t = 1, 2, 3, \cdots$ において，上下左右の 4 つの最近接格子点のいずれかに等確率（すなわち確率 1/4）で移動させる．この**確率過程**を **2 次元ランダムウォーク**と呼ぶ．**酔歩の模型**である．このランダムウォーカーが時刻 $t = 0, 1, 2, \cdots$ において格子点 $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2)$ にいる確率を $P^{(2)}(\boldsymbol{r}, t)$ と書くことにすると，これは

$$P^{(2)}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4^t} Q^{(2)}(\boldsymbol{r}, t)$$

で与えられることが分かる．ただしここで，$4^t$ は問題 12.1 で求めた $q^{(2)}(t) = \sum_{\boldsymbol{r}} Q^{(2)}(\boldsymbol{r}, t)$ の値であり，これで割っておくことで $P^{(2)}$ は確率として正しく規格化される：$\sum_{\boldsymbol{r}} P^{(2)}(\boldsymbol{r}, t) = 1$.

$d = 1, 2, 3, \cdots$ として，$d$ **次元単純立方格子**上のランダムウォークを考えることにしよう．初期時刻 $t = 0$ で原点 O に粒子があるとする．各時間ステップで，粒子は $2d$ 個の最近接格子点のいずれかに等確率（したがっておのおの確率 $1/(2d)$）で移動する．この $d$ **次元ランダムウォーカー**が，時刻 $t = 0, 1, 2, \cdots$ において格子点 $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ にいる確率を $P^{(d)}(\boldsymbol{r}, t)$ と書くことにする．するとこれは，次の漸化式を満たすはずである：

$$P^{(d)}(\boldsymbol{r}, t+1) = \frac{1}{2d} \sum_{\boldsymbol{r}' : |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}| = 1} P^{(d)}(\boldsymbol{r}', t), \tag{12.3}$$

$t = 0, 1, 2, \cdots$．ただし，

$$P^{(d)}(\boldsymbol{r}, 0) = \delta_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{0}} \equiv \prod_{j=1}^{d} \delta_{x_j 0}. \tag{12.4}$$

**問題 12.2**　確率分布関数 $P^{(d)}(\boldsymbol{r}, t)$ に**フーリエ変換**

$$P^{(d)}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Lambda} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \widehat{P}^{(d)}(\boldsymbol{k}, t) d\boldsymbol{k} \tag{12.5}$$

を施す．ただし，積分領域 $\Lambda$ は $\{\boldsymbol{k} : -\pi < k_j \le \pi,\ 1 \le j \le d\}$ を表す．漸化式 (12.3) を (12.4) の下に解くことにより，$\widehat{P}^{(d)}(\boldsymbol{k}, t)$ を求めなさい．

**解答**　2 次元正方格子上の任意の格子点 $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2)$ は 2 つの**正規直交ベクトル** $\boldsymbol{e}_1^{(2)} = (1, 0)$ と $\boldsymbol{e}_2^{(2)} = (0, 1)$ を用いて $\boldsymbol{r} = x_1 \boldsymbol{e}_1^{(2)} + x_2 \boldsymbol{e}_2^{(2)}$ と表すことができる．同様にして，$d$ 次元単純立方格子には $d$ 個の正規直交ベクトルがある．これらを $\boldsymbol{e}_j^{(d)}$ $(1 \le j \le d)$ と書くことにする．**波数ベクトル** $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ に対して，$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{e}_j^{(d)} = k_j$ $(1 \le j \le d)$ であるから

$$\sum_{\boldsymbol{r}' : |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}| = 1} \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \left( \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{e}_j^{(d)})} + \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{e}_j^{(d)})} \right)$$

$$= \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\sum_{j=1}^{d}(\mathrm{e}^{ik_j}+\mathrm{e}^{-ik_j})$$
$$= 2\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\sum_{j=1}^{d}\cos k_j$$

となる．したがって，(12.3) 式から

$$\widehat{P}^{(d)}(\boldsymbol{k},t+1) = \left(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\cos k_j\right)\widehat{P}^{(d)}(\boldsymbol{k},t).$$

初期条件 (12.4) より $\widehat{P}^{(d)}(\boldsymbol{k},0)=1$ なので，

$$\widehat{P}^{(d)}(\boldsymbol{k},t) = \left(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\cos k_j\right)^t, \quad t=0,1,2,\cdots$$

と定められる． ■

### 12.1.3 ランダムウォークの軌跡の次元

いま，格子点を 1 点選び，それを $\boldsymbol{r}_0$ と書くことにする．時刻 $t=0$ で原点 O を出発した $d$ 次元ランダムウォーカーが，ある時刻 $t'$ にこの点に到達する確率は

$$P^{(d)}(\boldsymbol{r}_0,t') = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_\Lambda \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0}\left(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\cos k_j\right)^{t'} d\boldsymbol{k} \tag{12.6}$$

で与えられることが分かったが，ランダムウォーカーはこの同じ点 $\boldsymbol{r}_0$ を，時刻 $t'$ 以外の時刻にも何度か訪れることだろう．そこで確率の和

$$G^{(d)}(\boldsymbol{r}_0) = \sum_{t'=0}^{\infty}P^{(d)}(\boldsymbol{r}_0,t')$$

を考えることにする．これは，原点 O を出発した $d$ 次元ランダムウォーカーが点 $r_0$ を訪れる総回数の平均値を与える．(12.6) を代入して，等比級数の和の公式を用いると

$$G^{(d)}(\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_\Lambda \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0}}{1-\dfrac{1}{d}\displaystyle\sum_{j=1}^{d}\cos k_j}d\boldsymbol{k} \tag{12.7}$$

という表式が得られる．

> **問題 12.3**　$G^{(d)}(\boldsymbol{r}_0)$ は $d \le 2$ では発散することを示しなさい．

**解答**　$k=|\boldsymbol{k}| \ll 1$ のときには，$|k_j| \ll 1\,(1 \le j \le d)$ であるから，$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \simeq 1, \cos k_j \simeq 1-k_j^2/2\,(1 \le j \le d)$ と近似できる．つまり $k \ll 1$ のとき (12.7) の被積分関数は

$$\frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0}}{1-\dfrac{1}{d}\displaystyle\sum_{j=1}^{d}\cos k_j} \simeq \frac{2d}{\boldsymbol{k}^2} \propto \frac{1}{k^2}$$

である．$d$ 次元波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ を極座標表示して，(12.7) の $d$ 次元積分のうちの動径成分 $k=|\boldsymbol{k}|$ についての積分を考えることにする．半径 $k$ の $d$ 次元球面の「表面積」は $k^{d-1}$ に比例するので，この積分は

$$\int_{k_0}\frac{1}{k^2}k^{d-1}dk = \int_{k_0}k^{d-3}dk$$

の形である．ただし，積分の下限を $k_0$ とおいた．$d<2$ のとき，この積分の値は $k_0 \to 0$ に伴って $1/k_0^{2-d}$ に比例して発散する．$d=2$ のときは $k_0 \to 0$ で $\log k_0 \to -\infty$ と対数発散する． ■

波数 $k_0$ が小さい，つまり波長 $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ が長い波は，光で考えると赤外線にあたる．そこで，このような $k_0 \to 0$ に伴う発散を**赤外発散**と言う．この結果は次のことを意味している：ランダムウォークの**軌跡**を（非常に長い時間をかけて追跡して）大域的に眺めてみると，それは曲線ではなく**ランダムな曲面**のように振舞うのである．よってランダムウォーカーが棲む空間が 2 次元以下だと，ランダムウォークの軌跡は空間を稠密に覆いつくすことになり，その結果，ランダムウォーカーが各点を訪れる回数は無限回になるのである．

格子点上の相異なる 2 点 $\boldsymbol{r}_1 \neq \boldsymbol{r}_2$ をとり，それぞれを出発点とする 2 つの独立なランダムウォークを考える．ここまでの話では，格子間隔は 1 としてきたが，これを $a$ とすることにしよう．このとき，2 本のランダムウォークの軌跡がある有界な領域 $D$ の中で交差する確率を $P_a^{(d)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;D)$

と書くことにする．$a \to 0$ の極限を考える．格子とは格子間隔 $a$ を単位とした**離散的**な構造であった．$a \to 0$ の極限はこの離散構造の単位を零とするということなので，この極限で系は連続体に収束することが期待される．そこで，$a \to 0$ を**連続極限**と呼ぶことにする．ただし，（格子間隔 $a$ を単位として測った）格子点の座標の値 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ はそれぞれ $1/a$ 倍しておいて，出発点は格子間隔の縮小によらず，空間の中で固定するようにする（格子上で定めた交差領域 $D$ も同様に $1/a$ 倍して，$a \to 0$ で不変にしておく）．極限

$$p^{(d)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; D) = \lim_{a \to 0} P_a^{(d)}(\boldsymbol{r}_1/a, \boldsymbol{r}_2/a, D/a)$$

は，次元 $d$ が 4 より大きいと零に収束することが証明できる．

ランダムウォークの連続極限を**ブラウン運動**と言う．上述の主張は「ブラウン運動は 2 次元的である」と要約することができる．2 本の直線を平面上に置くと，平行に置いたとき以外は交わる（交わらない平行な配置の方が例外的である）．しかし，2 本の直線を 3 次元空間内に置いたときには交わらない方が普通である（意識的に交差するように配置しなければ交わらない）．同様に 2 つの平面を 3 次元空間に置いたときには，きちんと平行に置かなければ交わってしまう．しかし，4 次元以上の空間では 2 つの平面が交わるのは特別な配置のときに限られる．ブラウン運動はランダムな現象ではあるが，2 次元という固有の次元性を持ち，それゆえに空間次元が 4 よりも大きいと軌跡は交差しなくなるのである．

## 12.2 流体力学における次元性

流体力学は次元に強く依存する．ここでは粘性が小さく，しかし零ではない流体を詳しく調べることにする．このような場合には，空間的に滑らかな速度場から出発しても，**ナヴィエ・ストークス（NS）方程式**の**非線形項**により，空間的に激しく変動する速度場が生じ，いわゆる**乱流**となる．速度の揺らぎがスケール空間をシステムサイズ $L$ から粘性効果が支配的な小さなスケール $\eta$ まで伝播する．この $L$ と $\eta$ の間は非線形項だけが働き，**慣性領域**と呼ばれる．そこではいろいろな量が**スケール相似則**を示す．

流体方程式の基本方程式であるナヴィエ・ストークス方程式は，連載第 11 回で述べたように，運動量保存則から導かれ任意の次元で成り立つ：$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ を満たす**非圧縮流体**では

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \boldsymbol{u}. \qquad (12.8)$$

(12.8) の左辺第 2 項の**移流項**は速度場に小さなスケールの空間構造を生成する役割をするのに対して，右辺第 2 項の**粘性項**は速度勾配を均す働きをする．両者の微妙なバランスが実現される様を描くのがナヴィエ・ストークス方程式である．

速度場の小さなスケールの構造は**渦度場**

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$$

に現れる．渦度場に対する方程式は (12.8) の回転をとることにより導ける．(12.8) の移流項は

$$\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = \frac{1}{2} \nabla u^2 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}$$

と書き換えられるので，

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}) = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}.$$

左辺の第 2 項をバラし，$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ を用いると

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \qquad (12.9)$$

となる．(12.8) 式と (12.9) 式が**流体の基本方程式**である．

### 12.2.1 1 次元

1 次元では非圧縮条件 $\partial u/\partial x = 0$ は満たされないので，(12.8) に代わって，次のようなモデル方程式がバーガーズにより提案された．

$$u_t + u u_x = \nu u_{xx}. \qquad (12.10)$$

ここで，$u_t$ と $u_x$ は関数 $u$ の $t$ による偏微分と $x$ による偏微分をそれぞれ表す．$u_{xx}$ は $x$ についての 2 階偏微分である．今後もこの表記法を用い

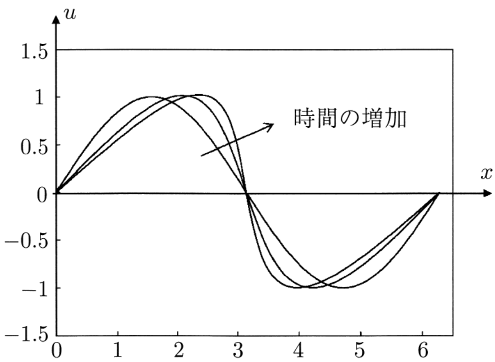



図 12.1　移流項による速度場の急峻化.

ることにする．**バーガーズ方程式**の意義は，NS 方程式の非線形の移流項と粘性項を備えていて，しかも**解析解**が存在することである．

バーガーズ方程式の左辺の非線形項だけを残した方程式

$$u_t + uu_x = 0$$

の解は，初期場を $u_0(x)$ とすれば，

$$u(x,t) = u_0\left(x - \int_0^t u(x(s),s)ds\right)$$

である．ここで $x(s)$ は時刻 $t$ に $x$ にいた粒子の時刻 $s\,(<t)$ での座標である．振幅の大きな領域の速度はより速くて，図 12.1 に示したように時間の経過と共に $u$ の空間形状が急峻になってくる．速度勾配が大きくなると粘性が効いてくる．バーガーズ方程式では速度場の非線形項による**急峻化**と粘性による**平滑化**が釣り合う．

**問題 12.4**　バーガーズ方程式 (12.10) に**コール・ホップ変換**

$$u = \alpha(\log f)_x \tag{12.11}$$

を施し，$\alpha$ を適当に選び，$f$ に対して上手く時間因子の変更をすれば，線形の**拡散方程式**に帰着できることを示しなさい．

**解答**　(12.11) を (12.10) に代入する．速度場の時間微分は

$$u_t = \alpha\left((\log f)_x\right)_t = \alpha\left((\log f)_t\right)_x = \alpha\left(\frac{f_t}{f}\right)_x$$

である．非線形項は

$$uu_x = \frac{1}{2}(u^2)_x = \frac{\alpha^2}{2}\left[\left(\frac{f_x}{f}\right)^2\right]_x$$

であるから，代入後の式は $x$ で積分できて，

$$\frac{f_t}{f} + \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{f_x}{f}\right)^2 = \nu\left(\frac{f_x}{f}\right)_x + C(t).$$

$\alpha = -2\nu$ と置けば，

$$f_t = \nu f_{xx} + C(t)f$$

となる．ここで

$$f = \exp\left(\int_0^t C(t')dt'\right)g \tag{12.12}$$

によって，$f$ から $g$ に変換する．すると，$g$ の満たす方程式は拡散方程式

$$g_t = \nu g_{xx} \tag{12.13}$$

になることが分かる．■

(12.12) を (12.11) に代入すれば，

$$u = -2\nu\frac{g_x}{g} = -2\nu(\log g)_x \tag{12.14}$$

と求められる．すなわち拡散方程式 (12.13) の解 $g$ の対数微分をとれば，バーガーズ方程式の解が得られることになる．

次の $g$ は (12.13) 式を満たす：

$$g = 1 + \mathrm{e}^{-(ax-\nu a^2 t)}$$

これを (12.14) 式に代入すれば，

$$u = \nu a\left[1 - \tanh\left\{\frac{1}{2}\left(ax - \nu a^2 t\right)\right\}\right]$$

となり，バーガーズ方程式に対する**テイラーのショック解**が得られる．$\nu a = u_0$ と置けば，

$$u = u_0\left[1 - \tanh\left\{\frac{u_0}{2\nu}\left(x - u_0 t\right)\right\}\right]$$

となる．この解は，十分に下流では $u = 2u_0$，上流では $u = 0$ で，遷移領域の幅が $2\nu/u_0$ のショック状の流れを表している．

1 次元乱流として，大きなスケール（小さな波数）だけを含むゆっくりと変動する速度場を初期

状態としてバーガーズ方程式をシミュレートしてみる．得られる結果は，図 12.1 の時間経過後の速度パターンのように，空間的にゆっくりと増加したのち急速に減衰する速度場がランダムに連なった三角波の集合である．

### 12.2.2 2 次元

**運動エネルギー密度** $\boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{x})$ の空間平均値 $\langle u^2\rangle$ に注目しよう．2 次元，3 次元の両方で用いられる関係をまず示そう*1)．

**問題 12.5**　(12.8) より，$\langle u^2\rangle$ の時間変化が

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u^2\rangle = -\nu\langle\omega^2\rangle \qquad (12.15)$$

と表されることを示しなさい．

**解答**　(12.8) と $\boldsymbol{u}$ の内積をとり，$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ を用いると，

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}u^2 + \nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}u^2\right) = -\nabla\cdot(\boldsymbol{u}p) + \nu\boldsymbol{u}\cdot\Delta\boldsymbol{u}.$$

上の式に $\boldsymbol{u}\cdot\Delta\boldsymbol{u} = \nabla_j(u_i\nabla_j u_i) - (\nabla_j u_i)^2$ を代入して，空間平均としての空間積分をとると，発散項（$\nabla\cdot$ のかかった項）はすべて落ちてしまう：

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\langle u^2\rangle = -\nu\left\langle\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right\rangle.$$

ここで

$$\left\langle\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2\right\rangle = \langle\omega^2\rangle$$

であるので，(12.15) が導かれる．■

小さな波数成分しかない滑らかな初期場から出発する．$\langle u^2\rangle$ は大きいが，$\langle\omega^2\rangle$ は小さいので，(12.15) によれば，エネルギーは最初はあまり減衰しない．時間が経つと $\langle\omega^2\rangle$ が増加し，**エネルギーカスケード**が起こるのであろうか．

まず，2 次元での $\langle\omega^2\rangle$ の時間発展を調べよう．(12.9) の右辺第 1 項は，$\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla$ は $z$ 微分しかないから，零である．したがって 2 次元では，面に垂直な渦度 $\omega$ に対しては，

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\omega = \nu\Delta\omega$$

であるので，

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\omega^2\rangle = -\nu\langle(\nabla\omega)^2\rangle$$

が導ける．ここで右辺を導くにあたっては，(12.15) の右辺の散逸項を導いたのと同じように空間平均をとっている．ゆえに，$\langle\omega^2\rangle$ は初期値より大きくなることはない．したがって 2 次元では大きなエネルギー散逸は起こらず，乱流特有のエネルギーカスケードは起こらない．

### 12.2.3 3 次元

2 次元では渦の強度は増加しないのに対して，3 次元では渦度場が増幅することが示せる．

渦度ベクトルの $j$ 成分の発展方程式は (12.9) より

$$\frac{\partial\omega_j}{\partial t} + u_k\frac{\partial\omega_j}{\partial x_k} = \omega_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \nu\Delta\omega_j \quad (12.16)$$

である．右辺第 1 項は速度勾配により渦が伸ばされたり，縮められたりする項であり，連載第 11 回で**カオス現象**を述べたときに見た，微小体積要素の時間発展と同じ振舞いをする．

**問題 12.6**　(12.16) の右辺の第 1 項の**速度勾配テンソル**を対称と反対称成分に分割し，対称成分しか寄与しないことを示しなさい．

**解答**　(12.16) の速度勾配テンソル $\partial u_j/\partial x_k$ を

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) = \Lambda_{jk} + \Omega_{jk}$$

のように対称テンソルと反対称テンソルの和で表す．$\Omega_{jk} = -(1/2)\varepsilon_{jkl}\omega_l$ なので

$$\Omega_{jk}\omega_k = -(1/2)\varepsilon_{jkl}\omega_k\omega_l = 0$$

であるから，対称テンソルだけが効く．対称テンソルが対角化されるような座標系を選び，対角化された $\Lambda_{jk}$ の成分を $\lambda_j$ で表せば，(12.16) は

*1) 以下では，連載第 11 回と同様に，同じ添え字が 2 度現れたときには，それに関して和をとるという**アインシュタインの記法**を用いることにする．

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k} = \lambda_j \omega_j + \nu \Delta \omega_j \qquad (12.17)$$

となる．■

非圧縮条件より $\sum_k \lambda_k = 0$ であるので，$\lambda_j$ には必ず正と負の成分がある．正の方向には渦が引き伸ばされ，負の方向には縮むことになる．$\langle \omega^2 \rangle$ の時間変化は (12.17) より

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\sum_j \langle \omega_j^2 \rangle = \sum_j \lambda_j \langle \omega_j^2 \rangle - \nu \sum_j \langle (\nabla \omega_j)^2 \rangle$$

となる．右辺の第 1 項では，$\lambda_j > 0$ の $\langle \omega_j^2 \rangle$ の方が $\lambda_j < 0$ のそれより圧倒的に大きいから，足し算すると正になる．渦の伸張により渦度の強度は急速に大きくなり，**エネルギー散逸**が増加する．

粘性が小さくレイノルズ数の大きな 3 次元乱流では，渦は糸状をしている．そこでは多数の**渦糸**が引き伸ばされ，変形され，分子粘性によりつなぎかえられ，**渦糸が絡み合った状態**が実現される．図 12.2 は計算機シミュレーションで得られたものである．3 次元空間の中，細い渦糸が密に絡み合って運動している様子を表している．

相転移に伴う**臨界現象**と同じように，乱流でも次元を上げるとシンプルになるかどうかを調べるために，**4 次元の乱流**のシミュレーションが行われている[1)]．ある点で 3 次元よりシンプルであるが，臨界現象におけるほど明快な結果は得られていない．微細スケールの**特異構造**が渦糸というライン状（1 次元的）ではなく，**シート状**（2 次元的）であることが見つかっている．

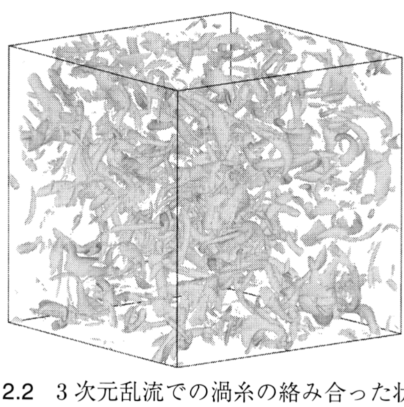


図 12.2　3 次元乱流での渦糸の絡み合った状態．

## 12.3 おわりに

本稿の冒頭で述べたように，物理現象は低次元空間中では空間次元の制限を強く受けそれに従属し，高次元空間中では制限なしに自由に振舞う．それでは，**空間次元性**と**現象の次元性**が拮抗し，そのあげく**共存する空間**は，何次元で実現するのであろうか．どうやらそれこそが我々の **3 次元空間**のようである．だからこそ物理現象はかくも豊富であり，物理学の理論は深く美しく，日々の葛藤に苦しむ我々の興味をかきたてるのに違いない．

まだまだ取り上げたい話題があるが，予定通り本連載は今回で終了とする．物理学に興味ある本誌読者諸氏は，今後も**具体的な問題を解く**ことによって，**物理学を存分に体験し**，もっともっと**数理科学**を楽しんでもらいたい．

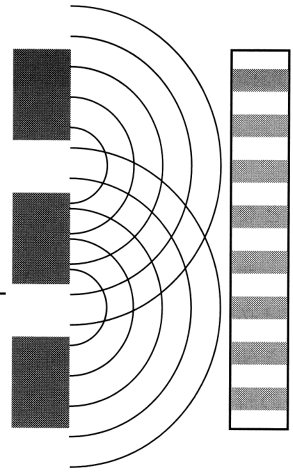
### 参考文献

1) E. Suzuki *et al.*: *Phys. Fluids* **17**. 081702 (2006); T. Gotoh *et al.*: *Phys. Rev.* E **75**, 016310 (2007).

（かとり・まこと，中央大学理工学部）
（なかの・とおる，中央大学理工学部）

# 目で見て学ぶ量子力学

## 第15回 実験でひもとく量子の不思議



# 超伝導電流が作る渦

## 磁束量子

外 村　彰

### 15.1 はじめに

今回から，いよいよ超伝導体中の磁束量子の観察実験の話に入る．“超伝導電流が作る渦—磁束量子—”を考える前段階として，まず水の流れが作る渦を復習する．ついで，磁場をかけたとき，超伝導体がどう反応するかを，電子波をあててじかに観察する．

### 15.2 磁束量子観察の歴史

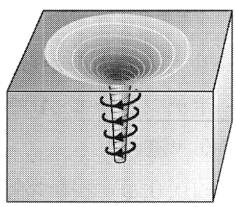
私が日立中研に入所した1965年，研究室長だった渡辺宏さんは，磁束量子を電子顕微鏡で観察する実験にチャレンジしていた．それから，20年以上が過ぎた1989年，やっと長年の夢が叶って超伝導体内部の磁束量子から外部に漏れている磁力線を干渉顕微鏡像として直接観察できるようになった[1]．輝度が高く干渉性の良い電子線が実現したお陰である．1992年には，350 kV電子顕微鏡を用いて，超伝導薄膜“内部”の磁束量子をローレンツ顕微鏡法で観察できるようになった．1999年，私は，この成果でフランクリン賞を受賞したが，渡辺さんは，自分の蒔いた種子が稔ったこともあって，この受賞を，ことのほか喜んでくれた（図15.1）．

### 15.3 渦

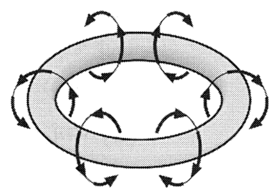
磁束量子は，“超伝導電流が作る竜巻”である．正確には，“渦糸”である（図15.2(a)）．電流が糸の回りをぐるぐる回ることによって，細い電磁コイルができる．



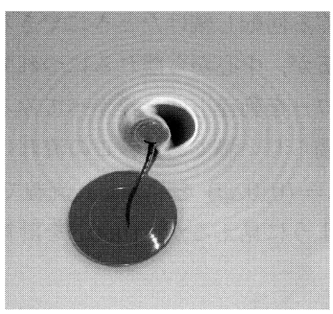
**図 15.1**　渡辺宏さんと筆者（フランクリン賞の受賞お祝い会にて—1999 年 6 月 28 日—）．渡辺さんは 1965 年頃，磁束量子の観察実験にチャレンジしていた．30 年経って，磁束量子の動きが一つ一つ手に取るように見えるようになり，渡辺さんは大喜びしてくれた．それがフランクリン賞の受賞に結びついた．



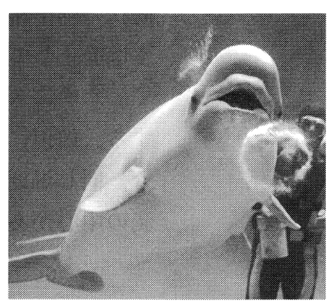
(a)



(b)



(c)



島根県立しまね海洋館『幸せのバブルリング』®

(d)

**図 15.2**　渦糸と渦輪．(a) 渦糸，(b) 渦輪，(c) お風呂の中にできる渦糸，(d) イルカが作る渦輪（シロイルカの観覧は休止中）．

自然の中には，いろいろな渦が存在する．竜巻や台風，銀河も渦巻いている．お風呂の水を流すと排水口に向けて渦糸ができる．渦糸は直線とは限らない．水面をゆらすと，竜巻のようにうねったりする．極端な場合，渦糸の両端がつながってリングになるときもある（図 15.2 (b)）．これは“渦輪（うずわ）”と呼ばれ，タバコの煙でできる．イルカも水中で渦輪を作ることができる．2009 年 5 月に沖

縄で開催した量子力学の国際会議のエクスカーションで，近くの“美ら海水族館”に出かけたときに，イルカが渦輪を作る様子を見せてほしいと頼んでみたが，島根のシロイルカしかできないと言われた（図 15.2 (d)）．自分でも，きれいな渦を作ってみようと，沖縄のホテルのバスタブで撮ったのが図 15.2 (c) の写真である．渦糸だけでなく水面にきれいな波紋ができている．

水や大気の流れの速度を $\boldsymbol{v}$ で表すと，渦の度合い“渦度”は，$\boldsymbol{\omega}$ で表せる．$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ である．詳細は文献 2) に頼せるが，$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ は $\omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}$, $\omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}$, $\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$ で定義されるベクトルである．この式は，磁場 $\boldsymbol{B}$ とベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の関係式 $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ とそっくり同じである．$\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{v}$ に，$\boldsymbol{B}$ は渦度 $\boldsymbol{\omega}$ に対応する．“渦糸”は棒磁石に，“渦輪”は AB 効果で使ったドーナツ状の磁石に対応する．

$\boldsymbol{A}$ は電子波の位相を変化させる重要な物理量であるが，$\boldsymbol{A}$ そのものは観測できないし，ゲージ変換の自由度があるので，イメージをつかむのはとても難しい．水の流れに対応させられるのなら，身近に感じられるので，具体的な例をいくつか考えて，この連載の主役である $\boldsymbol{A}$ の“イメージ作り”に役立てたい．

## 15.4 一様な磁場に対応する“流れ”

まず，“一様な渦度を生じる流れ”から始めよう．磁場で言えば，一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ を与えるベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ である．

**(a) 中心軸の周りを回る“流れ”**

まず，一様な渦度 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ を持つ流れ $\boldsymbol{v}$ を考える．$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}(-\omega y, \omega x, 0) = \frac{\omega}{2}(-y, x, 0)$ という流れは，1 つの解である．図 15.3 (a) に示したように，円筒状の桶をぐるぐる回転し続けたときにできる水の流れである．桶の中心では水は静止しているが，中心から離れるにつれて速度を増す．流線は同心円を描く．水面にストローを動径方向に浮かべてみると，ストローはぐるぐると回転する．如何にも渦らしい渦である．この流れは，中心点に限らず，どの位置でも，同じ渦度 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ を与える．流線では，桶の中心 $(x, y) = (0, 0)$ に渦の中心があるように見えるが，$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}_1$ を計算してみると，どの場所でも同じ

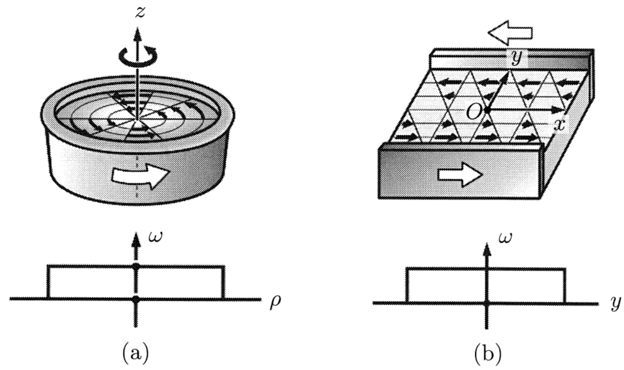



図 15.3 一様な渦度 $\boldsymbol{\omega}$ を生じる流れ $\boldsymbol{v}$．(a) 回転流，(b) 平行な流れ．

渦度になる．

一様な磁場 $\boldsymbol{B}=(0,0,B)$ を与える $\boldsymbol{A}$ は，いくらでもあるが，その 1 つが，$\boldsymbol{v}_1$ と同じ形の $\boldsymbol{A}_1=\frac{B}{2}(-y,x,0)$ である．磁場の場合，回転桶に対応するのは，電磁コイルである．コイルに電流を流すと，コイル内部の磁場は一様になる．$\boldsymbol{A}_1$ は，“回転する流れ” を表す．

**(b) 平板の壁が逆向きに動いたときの “流れ”**

$x$ 方向の流れ，例えば $\boldsymbol{v}_2=(-\omega y,0,0)$ でも一様な渦度 $\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega)$ を与える（図 15.3 (b)）．平行平板状の壁を，手前で右に，向こう側で左に一定速度で動かすと，粘性のある水は，いずれ図で示したような “平行な流れ” になる．水は手前では右向きに流れているが，向こう側に行くにつれて，次第に逆向きに流れる．中央の $y=0$ の平面では，水は静止している．

この流れは，渦があるようには見えない．だが $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ で定義した “渦度” $\boldsymbol{\omega}$ は存在する．ストローを $y$ 軸方向に浮かべると 90° までは回転する．

$\boldsymbol{v}_2$ の流れと同じ $\boldsymbol{A}$，すなわち $\boldsymbol{A}_2=(-By,0,0)$ は，$z$ 方向の一様な磁場 $\boldsymbol{B}=(0,0,B)$ を与える．$\boldsymbol{A}_2$ は，$\boldsymbol{A}_1$ に $\mathrm{grad}\chi\left(\chi=\frac{1}{2}Bxy\right)$ を加えたものである．つまり $\boldsymbol{A}_1$ は，この “ゲージ変換” を施すと $\boldsymbol{A}_2$ になる．このゲージ関数 $\chi$ は，$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\chi)=0$ を自動的に満たすので，$\mathrm{grad}\chi$ は “渦なしの流れ” となり，$\boldsymbol{B}$ には寄与しない．これも，水の流れに対応させることができるが，どんな流れになるのかは，15.6 節の (b) で考えよう．

## 15.5 渦の有無は，流線では判断できない

「流線が直線を描く場合（図 15.3 (b)）にも，“渦度” が生じるのは，何故なのだろう？」—渦や竜巻は，実在する存在である．船が鳴門の渦潮に巻き込まれたり，竜巻で家が壊されたりする．渦の位置は確定できる．台風や渦糸は，中心に “台風の目” がある．とりわけ磁束量子のように量子化した渦の場合には必ず “台風の目” ができる[傍注1]．渦の中心は，渦をとりまく波の位相の特異点になるためである．

こう考えてくると，渦は流線だけでは判断できないようである．「では，どう考えたら良いのか？」—“渦度” は，水に浮かべた小さな船に乗って周りの流れを見れば良い．渦度があるかないかは，船の上から見た相対的な水の流れに回転があり，船が自転して向きを変えるか否かで判断できる[傍注2]．実際，船の自転の回転角速度は $\frac{\omega}{2}$ で表される．“流線” のほうは，船が流れていく軌跡を表す．

こうして，“渦度” も “流線” も共に観測できる物理量であることが分かる．渦度は，船に乗ってみたときの自転角速度であり，流線は船の流れの軌跡である[傍注3]．

さて，磁場の場合には，どうだろう．$\boldsymbol{A}$ が，“渦なしの流れ” であれば，$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$ なので，$\boldsymbol{A}$ にどんな “渦なしの流れ” をつけ加えた $\boldsymbol{A}'$ も，同じ $\boldsymbol{B}$ を与える．観測できるのは，$\boldsymbol{B}$ なので，物理的には同じになる．ただ “渦

**[傍注1]**　層状の高温超伝導体では，磁場を層面に沿ってかけると，層面に扁平な磁束量子が生じる．この場合には，常伝導の芯はできない．ジョセフソン磁束量子と呼ばれている．

**[傍注2]**　図 15.3 (b) の流れに船を浮かべて，船の上から見て周囲の流れがどう流れているかを考えよう．中心点では，水も船も静止しているので，この流れの分布が，そのまま相対速度になる．「別の任意の 1 点に船を浮かべたときには，どうなるか？」船は “流れ” にのっているので，船の速度を引けば，図 15.3 (b) の中心点での状況と同じになる．どこでも同じ渦度が存在することが理解できる．

流線が渦を描いている図 15.3 (a) の場合，桶の中心に渦があるので，中心点は特別の場所のように思えるが，そうではない．どの点に船を浮かべても，周りには同じ渦が巻いていることは，同様に $\boldsymbol{v}_1=\frac{\omega}{2}(-y,x,0)$ から計算してみれば分かる．船にのってみれば，どの場所でも $\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega)$ の渦度があることを体感できる．

**[傍注3]**　互いに等速運動をしている 2 つの座標系で見たとき，流線は，違ってくるが，渦度は同じままである．ニュートンの運動方程式は，どんな等速運動をしている座標系で見ても変わらないが，流れの場合にはそうはいかない．川の流れと同じ速度で走って見れば，静止した池の水と同じになってしまう．渦の速度よりずっと早く走って見たとき，流線から渦は消えてしまう．見る座標系で，流れも流線もすっかり変わってしまう．だが，“渦度” のほうはそうではない．どんな座標系でも変わらない．流線はガリレイ変換に対して不変ではないが，流線に沿って循環 $\oint \boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ は不変になる．この値は $\int \boldsymbol{\omega}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

なしの流れ”というくせに，流線を見ると渦になっていることがある．

そこで，分りにくさの元凶であるゲージ変換の“渦なしの流れ”の例についても，考えておこう．

となり，渦度の面積分なので不変になる．磁場の場合，循環は $\oint \boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ になるので，磁束 $\int \boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ になる．

## 15.6 ゲージ変換に対応する“渦なしの流れ”

“渦なしの流れ”は，$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 0$ で定義される．このとき，$\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\phi$ とおくことができる．$\phi$ は，“速度ポテンシャル”と呼ばれる．$\phi =$ 一定 が，等ポテンシャル面になり，$\phi$ の傾き（gradient）が速度 $\boldsymbol{v}$ となり，速度を接線にもつ曲線が“流線”である[傍注4]．さらに，流れが圧縮されず吸い込みもわき出しもなければ，$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$ なので $\nabla^2\phi = 0$ となる．

磁場の場合，渦なしの $\boldsymbol{A}$ は，$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = 0$ なので，$\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\chi$ とおける．$\chi$ は“ゲージ関数”だが，これは電子波の位相になるので，重要である．$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0$ という条件をつけても，まだゲージ変換の自由度は残っている．このとき，$\chi$ は $\nabla^2\chi = 0$ を満たす[傍注5]．以下に，渦なしの流れの例をいくつか示す．

[傍注4] 速度ポテンシャルは電位と似ている．電場を $\boldsymbol{E}$，電位を $\phi$ とすると，$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi$ で与えられる．$\phi =$ 一定 は，等電位面である．

[傍注5] ただし，境界条件を無限遠方で $\chi$ がゼロになるようにすると，$\chi = 0$ となってしまうので，自由度はなくなってしまう．

**(a) $\phi = vx$**

この流れは，$x$ 軸を向いた一様な流れ $\boldsymbol{v} = (v, 0, 0)$ である（図 15.4 (a)）．$\phi =$ 一定 で与えられる等ポテンシャル面は $x =$ 一定 の面となり，流線は，$y =$ 一定 で表される．当然 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 0$ なので $\boldsymbol{\omega} = 0$ になる．速度ポテンシャル $\phi = vx$ は，ゲージ関数 $\chi = Bx$ に対応する．

次の例は，図 15.3 (a) の“渦状の $\boldsymbol{A}_1$ の流れ”から図 15.3 (b) の“層状の $\boldsymbol{A}_2$ の流れ”に変えるゲージ変換 $\chi = -\frac{B}{2}xy$ に対応する流れである．

**(b) $\phi = -\frac{\omega}{2}xy$**

この流れの速度は，$\boldsymbol{v} = -\frac{\omega}{2}(y, x, 0)$ で表せる．$\phi = -\frac{\omega}{2}xy =$ 一定 が等ポテンシャル面になる．$y = \frac{c}{x}$ とおき，$c$ の値を変えると双曲線群が描ける．これに直交する曲線群が流線となり，$x^2 - y^2 = 2c$ で表される双曲線となる．少し複雑だが，図 15.4 (b) に示す．

図 15.3 (a) に示した同心円状の流れ $\boldsymbol{v}_1 = \frac{\omega}{2}(-y, x, 0)$ に，この流れを加えると，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \mathrm{grad}\phi = (-\omega y, 0, 0)$ となり，図 15.3 (b) に示した“一方向の

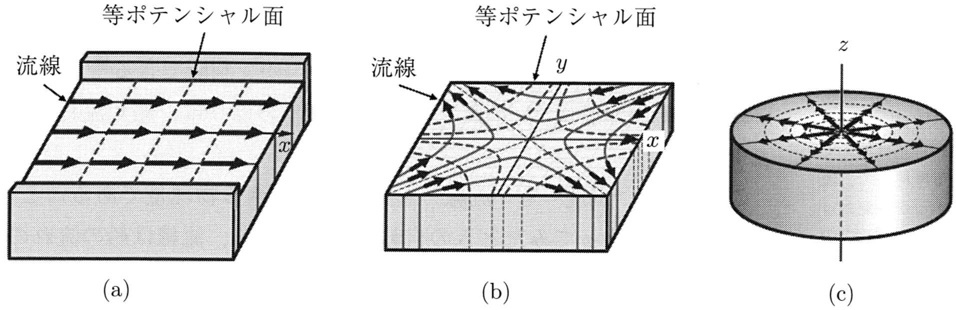



図 15.4　渦なしの流れ．(a) 一様な流れ $(\phi = vx)$，(b) 双曲線を描く流れ $\left(\phi = -\frac{\omega}{2}xy\right)$，(c) 渦糸の流れ $\left(\phi = -m\log\sqrt{x^2+y^2}\right)$．

流れ" $\boldsymbol{v}_2$ に一致する．$\boldsymbol{A}$ でいえば，ゲージ変換 $\chi = -\frac{B}{2}xy$ によって，渦の流れが，平行な流れに変換されることになる．

もう 1 つの例も考えておこう．

**(c)** $\phi = -m \log \sqrt{x^2+y^2}$

これは，中心軸から放射状に流れ出る "流れ" である（図 15.4 (c)）．円柱座標 $(\rho, \theta, z)$ で表すと，速度は $\boldsymbol{v} = \left(\frac{m}{\rho}, 0, 0\right)$ と表せる．速度は，中心から離れるほど小さくなる．$\phi =$ 一定 で与えられる等ポテンシャル面は同心円になる．流線は $\theta =$ 一定 になり，中心から放射状の直線になる[傍注6]．中心軸では，$\boldsymbol{v}$ は無限大に発散するので定義できない．ここから流れがわき出してくる．

$\boldsymbol{A}$ のイメージが少しつかめたと思うので，最後に，"磁束量子の周りの $\boldsymbol{A}$" に対応する流れを考えておこう．

[傍注6]　速度ポテンシャル $\phi$ から流線を求めるのは，複素関数を用いると簡単だが，この場合は図 15.4 (c) を見ただけでも分かる．

## 15.7 磁束量子の周りの $\boldsymbol{A}$ に対応する流れ

まず，磁束量子の中心には，常伝導芯がある．台風の目である．この半径を $a$ とすると，この内部には一様な磁場が存在する．その周りに超伝導電流が渦となって流れて，内部の磁場を作っている．その外側の超伝導体内部には $\boldsymbol{B}$ は存在しないが，$\boldsymbol{A}$ は存在する．

簡単のために，電流の流れている層の厚さは無限小と考える．このような構造を持つ磁束量子が生じる理由は，次回に説明する．

**(a) 太さのない磁束量子**

磁束量子を太さのない一本の磁力線と考えよう．これを水の流れにたとえると，"渦糸" である．1 本の回転軸の周りに引きづられて生じる水の流れは，$\boldsymbol{v}_3 = \frac{k}{2(x^2+y^2)}(-y, x, 0)$ で与えられる．円柱座標 $(\rho, \theta, z)$ で表すと，$\boldsymbol{v}_3 = \left(0, -\frac{k}{\rho}, 0\right)$ になる．この流れ（図 15.5 (a)）は，桶を回したときの流れ $\boldsymbol{v}_1$（図 15.3 (a)）とは違う．中心から遠ざかるにつれて流速は小さくなる[傍注7]．この渦は，中心で流速が無限に大きくなるので，特異点になる．流線は，同心円になるので渦があるように見えるが，中心軸を除いて，渦度はゼロ，$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 0$ になる[傍注8]．この水面に小船を浮かべると船の軌跡は円を描くが，船が自転することはない．速度ポテンシャルは $\phi = -k\theta$ となるので等ポテンシャル面は $\theta =$ 一定 で与えられ，中心軸から放射状にのびる平面となる．流線は $\log \rho =$ 一定 で与えられる同心円になる．図 15.4 (c) の流れと，流線と等ポテンシャル面が逆になっている．

この流れは，磁場に対応させると，無限に細くて無限に長い磁束の周りに生じる $\boldsymbol{A}$ になる．ここでは，磁場 $\boldsymbol{B}$ は中心軸だけに存在し，外部には存在しないとしたが，次に "太さのある磁束量子の周りの $\boldsymbol{A}$" に対応する流れを考えよう．

**(b) 太さのある磁束量子**

半径 $a$ の常伝導円筒の中を磁場が通り，その周囲の厚さ $\lambda$ の超伝導の表面層に渦電流が流れる．半径 $(a+\lambda)$ の外側には，電流も磁場も存在しないが，$\boldsymbol{A}$

[傍注7]　太陽の周りを回る惑星群を渦の一種と考えると，太陽に質量が集中しているので，惑星の速度は，外にいくほど遅くなる．渦巻き銀河は，渦の外側でも速度が一向に減少しない．渦巻き銀河は，我々の観測にかかっていない質量が渦全体を満たしているために，渦の周辺でも流れの速度が $\boldsymbol{v}_1$（図 15.3 (a)）のように減少しないと考えられている．見出されていない質量は "ダークマター" と呼ばれている．渦の流れを調べると，宇宙の構造まで分かる．

[傍注8]　中心軸上では，rotation の値は計算できない．かといってゼロではない．その証拠に，速度 $\boldsymbol{v}_3$ の大きさが無限大になるので，循環 $\oint \boldsymbol{A}d\boldsymbol{s}$ を中心軸を周回する路に沿って計算すると，$2\pi k$ になる．勿論，中心軸を含まない積分路では $\oint \boldsymbol{A}d\boldsymbol{s} = 0$ である．

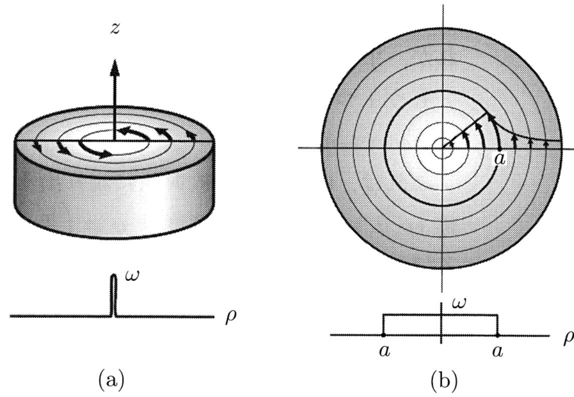



図 15.5　磁束量子に対応する流れ．(a) 無限に細い磁力線の周りの流れ，(b) 半径 $a$ の磁束の周りの流れ．

は存在する．$\boldsymbol{A}$ が渦の周りを周回したときの線積分が $\oint \boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \Phi$ で与えられるので $\boldsymbol{A}$ の回転成分が存在するためである．このような磁束量子に対応する水の流れを考えてみよう．

$\lambda = 0$ で近似したとき，円柱座標 $(\rho, \theta, z)$ を用いて，渦度 $\boldsymbol{\omega}$ は，$\rho < a$ のとき $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ となり，$\rho > a$ で $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 0)$ と表せる．円柱内部で渦度は，一定で外部ではゼロになる．流れ $\boldsymbol{v}$ のほうは，$\rho < a$ で $\boldsymbol{v}_1 = \frac{\omega}{2}(-y, x, 0)$，$\rho > a$ で $\boldsymbol{v}_3 = \frac{k}{2(x^2+y^2)}(-y, x, 0)$ である．$k = a^2\omega$ で，内外の 2 つの流れが $\rho = a$ で連続的につながる．

この流れ $\boldsymbol{v}$ の流線（図 15.5 (b)）は，同心円になるが，水面に船を浮かべると，$\rho > a$ では船は向きを変えずに一周する．$\rho < a$ では，向きを変えながら公転する．こんな水の流れは，水の中で半径 $a$ の薄膜状の円筒を回転させれば生じる．

磁束量子の場合，超伝導体の孔の中には $\boldsymbol{B}$ は存在するが，外部の超伝導体中には存在しない．$\boldsymbol{A}$ の流線は，超伝導体内部でもぐるぐる回っているが，“渦なしの流れ” $\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = 0$ である．$\oint \boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$ かと思うと，そうではない．磁束量子の周りを一周する経路では，$\oint \boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \Phi$ となる．もしも，「この水の流れを半径 $a$ で切り離してしまったらどうなるだろうか？」円筒の外側で水の流れを切り離したら，円筒が回っている限り内部の流れは生じるが，外側は粘性でつながっているので，外側の流れはなくなるだろう．ところが，磁場の場合には，$\boldsymbol{A}$ の流れは内外で粘性でつながっている訳ではない．内部に磁束があるという理由だけで $\oint \boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \Phi$ となるので，$\boldsymbol{A}$ は外部でも存在する．これが AB 効果を生じる．

## 15.8 超伝導体中に生じる磁束量子

次に，超伝導体に磁場をかけて磁束量子を発生させ，それを観察しよう．常温では，磁力線はそのまま突きぬけるが（図 15.6 (a)），臨界温度[傍注 9]，$T_{\mathrm{c}}$ 以下になると，劇的な変化が起こる．超伝導体表面に超伝導電流が流れ，磁場が

［傍注 9］　超伝導体は高温では超伝導状態を示さない．ある臨界温度 $T_{\mathrm{c}}$ 以下に冷やすと，突然抵抗がなくなり超伝導になる．電子が対をなしてクーパー・ペアを作り，より安定な状態になる．

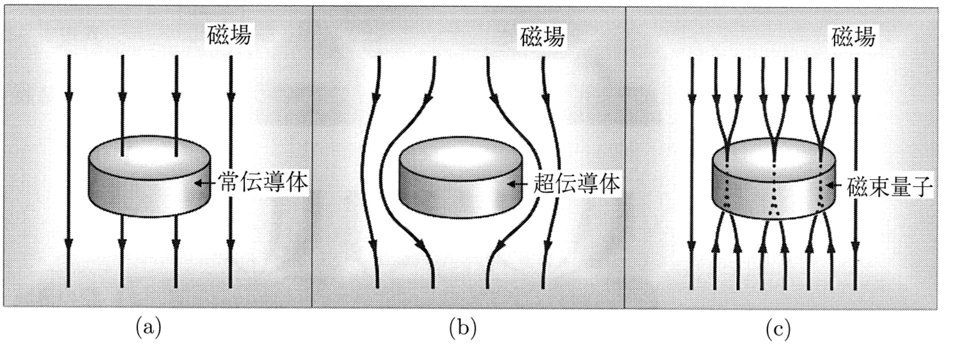



図 15.6　第二種超伝導体に磁場をかけたときの磁力線の振舞い．(a) $T > T_{\mathrm{c}}$ で素通りする磁力線，(b) $T < T_{\mathrm{c}}$ で迂回する磁力線，(c) 糸状になって突きぬける磁力線—磁束量子．

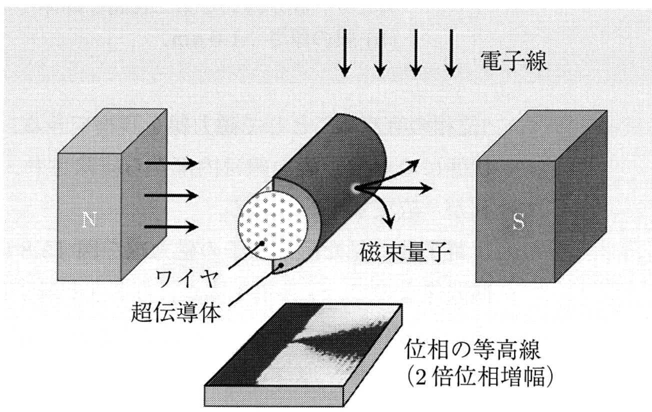



図 15.7　磁束量子の観察実験．

内部から排除される（図 15.6 (b)）．これが“マイスナー効果”である．磁場をさらに強くすると，迂回する磁力線のプレッシャーが強くなり，やがて限界が来て，超伝導は破れてしまう．第二種超伝導体では，超伝導は細い糸状に破れて，磁力線を通す．糸の周囲は超伝導に囲まれている．クーパー・ペアの波が立っているので，波が一周したときに波の山と山が一致するように量子化され，“磁束量子” になる（図 15.6 (c)）[傍注10]．磁束量子が突きぬけた超伝導体をトポロジー的に見れば，前回触れたドーナツ状の超伝導体と同じ形状になり，量子化磁束 $\frac{h}{2e}$ が糸の中を突きぬける．

[傍注10]　“クーパー・ペアの波” は第 14 回で説明した．電子が 2 つずつ対をなしてクーパー・ペアを作る．たくさんのクーパー・ペアはボース粒子なので，パウリの原理から解放されて，同一の状態になる．引力が働いている訳ではないのに，ボース粒子だという理由で凝縮して，巨視的なクーパー・ペアの波を作る．これは電荷をもった波なので，ベクトル・ポテンシャルに反応する．

## 15.9 磁束量子の磁力線を見る

磁束量子そのものを直接観察する手だてはこれまで存在しなかった．磁束量子が表面に顔を出した位置に集まった砂鉄を，レプリカとして観察するビッター法などを使って，表面での配置を観察していた．直接観察への第一歩は，電子線干渉顕微鏡によって超伝導体から出てくる磁力線を観察することから始まった．

観察方法を図 15.7 に示す．細いワイヤーに右側から鉛を蒸着して薄膜を作る．磁場をかけると，室温では薄膜を素通りする．上から電子線をあてれば，

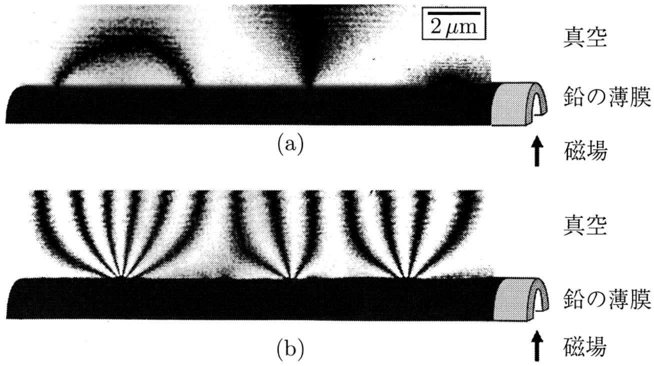



**図 15.8** 鉛の薄膜を突きぬける磁力線の干渉顕微鏡像．2 倍位相増幅した干渉顕微鏡像なので，干渉縞 1 本が量子化磁束（$\frac{h}{2e}$）一本に対応する．鉛は第一種超伝導体だが，膜が薄いと第二種超伝導体として振る舞う．(a) 膜の厚さ：$0.2\,\mu$m，(b) 膜の厚さ：$1.0\,\mu$m.

“位相の等高線” として磁力線を観察できる．$T_c$ 以下に冷やすと，薄膜は超伝導状態になって，磁力線は内部から排除され，細い糸の中に押しこめられる．これが “磁束量子” である．

電子波で見た磁束量子の磁力線を図 15.8 に示す．2 倍位相差増幅した干渉顕微鏡像なので，干渉縞 1 本が，ちょうど量子化磁束 $\frac{h}{2e}$ に対応する．写真下方の黒い部分は薄膜である．図 15.8 (a) は，薄膜の厚さが $0.2\,\mu$m，(b) は $1.0\,\mu$m の場合を示す．厚さの違いによって，それぞれ，第二種と第一種超伝導体特有の振舞いを示す．つまり，(a) では個々の磁束量子が，(b) では複数本の磁束量子が束をなした形で薄膜を通過する．

図 15.8 (a) 右側には，超伝導体表面から細い一本の磁力線が発生して真空中に広がっていく様子が観察できる．数 $\mu$m に広がっていた一本の磁力線が，膜表面近傍では直径 $0.15\,\mu$m に細くなって超伝導体の中に吸いこまれている．1 Oe（エルステッド）以下の磁場しか印加していないのに，ここでは 1000 Oe にも強くなる．図 15.8 (b) では，上下方向に平行な磁力線が，膜に近づいて，数本ずつ束になって小さな領域に流れ込んでいく様子が観察できる．磁場に反応した “クーパー・ペアの波” が磁力線を細い糸の形で通したのにちがいないが，この観察結果の解釈は，次回，数式を交えて考える．

### 参考文献

1) T. Matsuda, S. Hasegawa, M. Igarashi, T. Kobayashi, M. Naito, H. Kajiyama, J. Endo, N. Osakabe, A. Tonomura and R. Aoki: *Phys. Rev. Lett.* **62** No.21 (1989) 2519–2522.

2) 今井功：『流体力学』（裳華房，1974 年）；佐野理：『連続体の力学』（裳華房，2000 年）.

（とのむら・あきら，（株）日立製作所基礎研究所／（独）理化学研究所基幹研究所／（独）沖縄科学技術研究基盤整備機構）




# 無駄のすすめ

坪井　明人

私の専門はロジック（数理論理学あるいは数学基礎論）と呼ばれる数学の１分野である．その中でもモデル理論というものが狭い意味での専門分野ということになる．どうしてその分野を知り，興味を持ち，そしてその分野の研究者になろうとしたのか，何が魅力なのか，そういうことを研究者を目指す人たちに熱く語ってみようと思った…．しかし改めて考えるとよくわからない．研究人生を変える感動的な出会いや転機があったとは思えないし，心に残る言葉もすぐには思い出せない．というよりも，自分のたどった道，これから進もうとする道を人様にお話しすることが気恥ずかしい．

そこで兼好法師にはなれないが，心にうつりゆくよしなしごとを順不同で書くことにした．思いつくままに，とりとめもなく，後先を考えずに書くので主張に一貫性はない．整合性もないかも知れない．これから研究者を目指す方の参考になれば嬉しい限りですが，どうなりますか．学部生，大学院修士課程の読者を念頭に書いてみようと思う．偉そうに書く部分もありますが，どうかお許しください．

小さいときから学者に憧れていた．これだけは確かである．しかしこれは私に限ったことではなくて，同世代の相当数の子供がそうだったと思う．私の小さいとき，国内では鉄腕アトムのお茶の水博士，ゴジラの芹沢博士，鉄人28号の敷島博士が活躍していた．海外に目を移せば，毎回難しい手術をこなすベンケーシーがいた．タイムトンネルで旅するニューマン博士もいた．時代は科学，技術，学問というものに敬意を払い，少年少女は自然に科学やその探求者である博士（研究者）に漠然とした夢を感じ，自分もその世界に身をおきたいと考えていた．

今の時代も確かに科学技術は重要視されているが，技術の側面ばかりが表立っていて，その哲学的側面は疎かにされている気がしてならない．例えば技術文明の根幹に位置する計算機も，チューリングの数理論理学的な，もっと言えば哲学的な興味に基づく仕事がもとになっている．しかし今の世の中，このことにはあまり注目されていないように思う．これから研究者を目指す方は，ぜひ哲学を大切にしていただきたいと思う．目の前に与えられている課題に集中することは一番大切だが，一歩ひいて全体像を把握することも大切なことだろう．何が大切なのか，何が求められているのか，全体を見渡すことにより本質が分かることも多いはずである．

## 1. ハム

小学生の頃アマチュア無線というのが流行って

いた．今では死語かも知れないが，ハムと呼ばれていて，ハムといえばアマチュア無線の意味として世間で広く認知されていた．電波を通して世界の人とお友達になれる．そういう触れ込みで結構人気があった．

私自身は，知らない人と交信して何が面白いのかと思っていたが，6 年生のときに級友に誘われて勉強を始めた．国家試験があるので，それに受からなければならないのである．だがテキストを買ってきて開いてみると，最初から何のことかわからない．抵抗の大きさが 1 オーム，2 オームでなくて，$r$ オームなどと書いてある．$r$ は一体いくつなのだ．2 なのか 3 なのか，はっきり決めろと言いたくなった．次のページには，電流 $i_1, i_2, i_3$ を求めるには連立方程式を解けばよいとあり，クラメールの公式が載っていた．確かに日本語で書いてあるが，意味が全く分からない文章，そういうものが世の中に存在することに感銘を受けた．

しかし，眺めているうちに人間なんとかなるもので，どんな場合でも通用するように，わざとぼかして $r$ と書いてあることがわかり，行列式は右下方向の斜めの積から右上方向の斜めの積を引けばよいこともわかった（幸いにしてそのテキストには 4 次以上の行列は出てこなかった）．その後も未知の言語の解読に悪戦苦闘しながらも，中学校 1 年生のときに電話級無線技師というのに合格した．しかし，もともと通信に興味があったわけではないし，我が家には無線機を買うだけの経済的余裕もなかったので，結局それで終わってしまった．

ハムとのつきあいはそれきりだが，知識の獲得以上に学んだことはあった．分からなくても長時間考えれば，そのうち何とかなること．人に聞かずに自分の力だけで理解できたときは，大きな喜びがあること．この 2 つの経験は，今思えば，研究者への道を開く原体験だったと思う．

## 2. 学生時代

高校は地元の進学校に行った．数学の成績はよくなかった（他の教科の成績も悪かった）．式を展開したり，因数分解したり，実際に積分の計算をして面積を求めることに興味がわかなかった．やり方さえ分かれば練習する必要なんてないと考えていたので，ちょっと複雑になると手も足も出ない．そんな高校生だった．計算に習熟することの重要性[*1)]に気づいたのは，ごく最近である．

1 年生の頃に，興味深く読んだ本に『詭弁的推論』（今は絶版でしょうか）というのがあった．詳しくは忘れたが，例えば「長さ 1 の線分と長さ 2 の線分は同じ長さである」，「円の弧の長さは直径の 4 倍である」という命題がインチキの議論で示されている．もちろん今から考えれば，洗練されたインチキではないのだが，その当時はかなり夢中になった記憶がある．しかし不思議なことに友人の誰に話しても感動してもらえなかった．多くの反応は「長さ 1 の線分と長さ 2 の線分が同じ長さのわけがないのだから議論しても意味がない」というものである．推論のどの部分に誤りがあり，なぜそのような誤りを正しいものと判断してしまうのかを楽しむもの，ということがなかなか理解してもらえなかった．私自身はそのようなことが非常に面白く感じられた．おそらく，人間の論理や推論というものにこの当時から興味があったのだと思う．

大学は東大の理科 II 類に入った．すでにこの時期には，数学科に行くことを決めていたが，周りには化学，生物や医学関係への進学を目指す人が多く，異なる文化，異なる目的意識を持つ人々の中で過ごせたことはいい経験になった．大学大綱化以来，専門の教育を重視するあまり，教養教育が疎かにされてきた．その反省から近年各所で表明されている過激な反動には逆に危惧せざるを得ないが，教養教育の重要性は身をもって感じた．狭い範囲の専門家は必要だろうが，狭い範囲だけの知識と手法だけで解決できる問題は多くないだろう．

数学科を卒業後，大学院は筑波大学に進んだ．

*1) 特に線形代数や微積分の講義のときに計算力の重要性は痛感している．講義の前にあらかじめ計算していた結果に誤りがあることに気づくと，黒板の前で真っ白になってしまうことが多々ある．

当時筑波大学はできたばかりで，東京の仲間からは「たぬきが出るぞ」などと冷やかされた．「これなむ都鳥」の在原業平の心境もあったが，初めて自分がやりたい分野の学問を思う存分できることが嬉しかった．その当時は今と違って（少なくともロジックの分野で）教育目的のセミナーという概念はなくて，大学院生は思い思いに勝手に好きなことをやっていた．実質的に指導がないので，とんでもない方向に行ってしまう人も中にはいたが，5 年一貫性博士課程の気軽さ，自由さがそこにはあった．学問をしているという実感があった．この時期にはロジックとその近傍でその後活躍することになる人たちが大学院生として何人も在籍していて，他大学の大学院生や単なる愛好家も含めて真剣に自主セミナーを行っていた．そしてセミナーの後にはよく飲みに行った．数学に対する思いを語り合った．

そんな中で，早稲田大学理工学部で行ったセミナーは特に有意義だった．その後に私の専門分野になるモデル理論の新しい教科書を 2 カ月で読み終えようと企てた．それまで読んでいた教科書は S. Shelah 氏によるもので，朝から晩まで読んでも，数行しか進まない（実際には昼過ぎに起きて定食屋に行きその後喫茶店でコーヒーを飲んでからなので夕方から明け方まで）．1 週間かけても 1 ページ進むのがやっとという状況が長く続き精神的に落ち込んでいた．新しい教科書は A. Pillay 氏によるもので，カバーしている範囲は比較にならないくらい狭いが，明快な議論の仕方に驚いた．これならば，全体像を短期間でつかめると思った．その当時早稲田の大学院生だったブール代数が専門の T 氏，故人になってしまったが証明論の M 氏に無理やりお願いをして話を聞いてもらった．専門でないのに真剣に話を聞いてくださったお二人には本当に感謝している．

初めて外国に行ったのは，1980 年代前半だろうか．大学院生として，シカゴで行われたモデル理論の研究集会に参加した．そこで Shelah 氏，Pillay 氏に初めてお会いした．Pillay 氏に前述の教科書を読んだこと，その中の証明に誤りを見つけたことなどを話した．たどたどしいを通り越した英語力*2) なのでなかなか理解してもらえなかったが，理解すると氏は，「他の人に言われて証明を変えてしまったが本来の証明は正しいと思う」といって考え始めた．その日の講演の後に，訂正版の証明を教えてくれた．大した指摘ではなかったが，世界で一番先に誤りに気づけたことが，自分にも何かできそうだという自信につながったのを覚えている．

## 3. 絵を描くこと

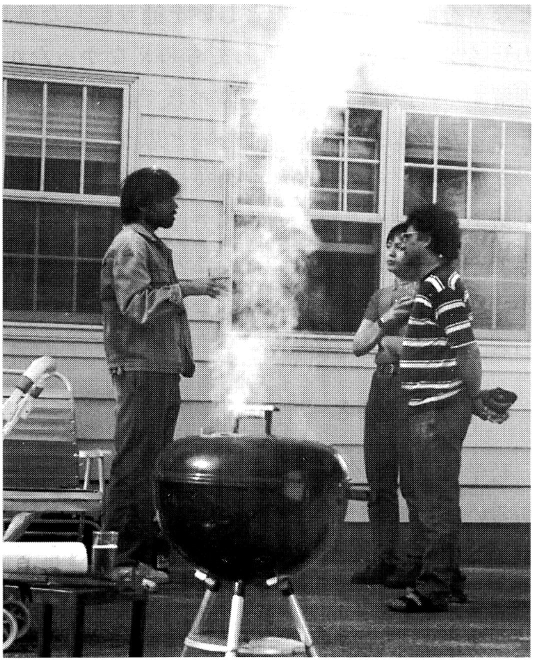
数学では議論の手助けとなる絵をいかに上手にあるいは芸術的*3) に描くかが重要だと考えている．議論の本質を視覚的に美しく表現することは，相手に伝えるためだけでなく，自分自身がより深く問題を理解するためにも必要になると思う．

数学は言語であるとよく言われるが，自然現象，社会現象，心理現象を記述し伝えるための道具という意味であろう．自然現象，例えば波の伝わり方を数学的議論の対象とするのならば，如何に伝播の状況をイメージとして表現するかが重要となろう*4)．私の専門のロジックでは，その言語としての数学自体を対象として研究することになる．この場合にも視覚に訴えることが重要だと思うのだが，誰もが共通に持つイメージがなかなかないので，議論の手助けとなる絵を描くのがかなり難しい．そこで学生諸子は大抵の場合に描くことを諦めてしまうのだが，これはまずいと思う．数学のアイディアは複雑そうに見えても意外に本質は単純な場合もある．しかしそれを数学的に厳密に表現しようとすると非常に長くなってしまう．結果分かりにくいという状況が生まれる．複雑に添

*2)　マップ（地図）を頼んだらモップが出てきた，コーヒーを頼んだらコーラが出てきたなどの体験を持つ．友人にはバターを頼んだらバッテリーが出てきた人もいる．

*3)　それでは私が芸術的な絵を描けるかというと駄目かもしれない．私の願望と思っていただきたい．

*4)　このようなかなり具体性を持つ絵に限らず，例えば「ベン図」やさらには「矢印」というのも視覚に訴えている絵なのだと思う．ベン図というのは円（丸）で囲った図形による絵だが，円はぱっと目に入ってくる．多分嘘だろうが，私自身は円に反応する脳細胞があるんじゃないかと思っている…．そんなはずないですね．



Pillay 氏ご自宅でのバーベキューに呼ばれて（インディアナ州 1995 年春）.

え字が入れ子になっている式を理解する場合，もともとの論文の式が誤って書かれていれば，そのままでは解読不可能になってしまう．そんな論文を読むとき，まず全体像を把握することが必要でしょう．とりあえず，ざっと読んでしまう．それから細かい部分を理解する．そして細かい部分の本質を一目で理解できるような絵を描く．そうすると，一つの論文とその主要結果が数枚の紙に凝縮され，それを見ることで議論の展開が一目瞭然となる．視覚化，映像化するのが難しいと言われていた小説でも映画になっているので，ぜひ数学の視覚化にも挑戦してもらいたい．

## 4. 効率的な時代

大学院の大衆化*5) という言葉遣いは正しくないかも知れないが，大学院に進むことが研究者を目指すことを必ずしも意味しなくなった．したがって，大学院は環境を与えるところ，研究者になりたいなら自分で問題を見つけることが大切，だから後は自分で勉強してね，先生は何も教えないから，という言い訳は許されなくなった．学生も当然に具体的な指導を受けることを希望するし，それに応えて教員も多くの時間を学生の指導や講義の準備に使うことになる．その結果として，望むならばある程度の知識は短期間で身につけることが可能となった．私自身が大学院に入って数年を要して得た程度の知識であれば，（能力さえあればという仮定つきではあるが）半年程度で身に付けることが可能だと思う．

*5) 数年前になるが大学院でレポート問題を出したら，ネット上の大規模掲示板にその問題が載った．「誰か答えを教えてください」と書かれていたらしい．



共著論文の最終打ち合わせのため，Kim 氏，Kolesnikov 氏とミシガン大学でセミナーをしたときの写真．Kolesnikov 氏とはこの数時間前に初めてお会いした（2007 年冬）.

このことを含めて極めて効率的な世の中になったと思う．E メールによって，世界との間での情報伝達に要する時間は非常に短縮された．昔なら往復で 2 週間もかかる海外との通信が瞬時にできてしまう．言葉による障害は残るとしても，距離による障害はないだろう．場合によっては国内との連絡より海外との連絡のほうが早いことすらある．夜にメールを打っておけば，朝に返事が返って来ていて，昼間考えてまた夜にメールということを繰り返せば，効率的に数学の議論ができてしまう．相手と一度も会ったことがなくても，一緒に研究をして短期間で共著論文が書ける時代になった．

遠い場所との距離は縮まったが，やはり顔を見ての議論は大切だと思う．面倒くさがりで，研究

集会にもあまり出かけない私が言っても説得力に欠けるが，若い人たちは積極的にいろいろな場所に出かけてほしいと思う．

## 5. 効率的でないこと

効率的な研究を目指すのであれば，分からない箇所は知っている人に聞いて，すばやく知識を付けて，場合によってはある程度アイディアをもらい，論文を書くというのがよい．最初は猿真似であっても，そのうちに自分の世界ができてくる．

確かにそう思う．そうは思うのだが世の中効率的なことがすべてではないとも思う．同じ結果にたどりつくとして，早くその結果にたどりつくほうがよいとは限らないと思う．ピタゴラスイッチのように，大きな遠回りをして同じ結果を得たとしても，そこには味わいがある．努力して得られた結果がよく知られている結果だとしても，悲観する必要はない．たとえ既存の結果の真部分集合になっていても数学者（研究者）への道が多少遠ざかるだけである．幸運な場合には新しい知見が加わる．結果が同じでも，証明方法が新しい可能性がある．証明が異なれば，適用範囲が広がるかも知れない．

芭蕉翁は江戸を出て白河の関を越え飯坂温泉に到るまで1月以上を要した．現在高速を利用すれば数時間で着くことができる．私は逆コースを飯坂温泉からつくばまで子連れサイクリングしたことがあるが，それでも3泊4日でついた．曽良とともに，蚊やダニになやまされながら旅した道を，冷暖房完備のホテルに泊まり名物を食しながら快適に旅できる．先人の苦労とは比べ物にならない楽な旅である．学問においても我々は先人とは比較にならない恵まれた研究環境にある．だからこそ少しは遠回りをしてもよいのではないだろうか．無駄を楽しむ余裕があってもよいのではないだろうか．

若い人はあまり効率だけに拘らないでほしいと思う*6)．いろいろなことに興味を持ち，いろいろなことに挑戦してほしいと思う．数学の一分野，物理の一分野に限定しない研究を目指していただきたい．

（つぼい・あきと，筑波大学大学院数理物質科学研究科）

*6) と思いつつも，自分の学生には「論文，論文，余計なこと考えないで論文をかけ」とうるさく言っているのが現状．

# 2009年（1月号～12月号）総目次

Vol. 47, No. 547～Vol. 47, No. 558

## ■インタビュー



## ■名著に親しむ



## ■連　載

「目で見て学ぶ量子力学」　外村　彰



「視覚の科学と数学」　新井仁之



「問題例で深める物理」　香取眞理・中野　徹



## ■リレー連載

「物理の道しるべ」



「数学の道しるべ」



## ■「数理科学」は語る



## ■書　評

## 演習　微分積分

**寺田文行・坂田泩・斎藤偵四郎著／A5 判／本体 1456 円**

各例題が，頁単位でまとめてあり，さらに各節のはじめに微積分の基礎事項が小見出しのもとに簡潔に述べられており，微積分全般に対する深い理解と真の応用力が涵養できる，理工系学生必携の清新な演習書としてめざましい普及をみせている．

## 演習と応用　微分積分

**寺田文行・坂田泩著／ A5 判／本体 1700 円**

本書は，基本事項の解説に続き，洗練された例・問題とそのくわしい解答により，大学で学ぶ微分積分学をより深く理解できるよう構成されている．また，レイアウトに配慮し，2 色刷とするなど，見た目のわかりやすさにも工夫をこらしている．

## 基本演習微分積分

**寺田文行・坂田泩著／ A5 判／本体 1600 円**

大学初年級，高専等の学生を対象とし，基本的な例題・問題を多く取り入れ，わかり易く丁寧にまとめた．巻末の問題解答も充実している．頁単位・見開き構成で読み易さも配慮した 2 色刷．

## 詳解演習　微分積分

**水田義弘著／ A5 判／本体 2200 円**

本書は，高校で数学 II を学習した学生が解析学の履修に困らないよう基本的事項について詳しい解説を行うことを目的として作られている．例題とその後にもうけた演習問題を通して大学で学ぶ微分積分がやさしく理解できる．

## 解析演習

**野本久夫・岸正倫著／ A5 判／本体 1845 円**

本演習書は解析学の基礎—実数から多変数解析の入門まで—を適切な例題をとりあげて，その解法ともども，読者の解析的素養をより確かなものとすることを目的に書かれた．ページ単位の読みやすい構成．

［サイエンス社］

**特　集**（2010 年 2 月号予告）

# 数学の可視化

## イメージと直観からの展望



本体 952 円

**特　集**（2009 年 12 月号）

# 《原理》の探求

## 深遠なる物理法則の源に迫る



本体 952 円

# 編集後記

今回の特集は如何でしたでしょうか．

おそらく多くの人にとって「無限」という概念は，途方もなく大きい，とか途方もなく多い，ということを想像されるのではないかと思います．そして，そんなに大きなものなど想像がつかないというのが実状ではないかと思います．実際，私も数学で初めて「無限」という言葉が出てきたとき，一体何のことやら想像もつかない，というのが感想でした．

ところで，日常で「無限」という言葉がどう使われているか，辞書を見ると，「無限の可能性」という言葉が出てきます．今回の特集で言えば，数学には無限の可能性があることと，「無限次元」に無限の可能性があることの 2 つが想起され，数学の未来が大変楽しみであることがわかります．

小誌は一足先に新年を迎えました．今年も数学や物理の無限の可能性を信じて，様々なテーマを読者の皆様にお届け致しますので，楽しんでご覧いただければ幸いです．また一年間よろしくお願い致します．

(R)


**数　理　科　学　1月号**

2010 年 1 月 1 日発行

数理科学編集部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

発行人　木　下　敏　孝

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)



本誌の内容を無断で複写複製・転載することは，著作者および出版者の権利を侵害することがありますので，その場合にはあらかじめサイエンス社著作権担当者あて許諾をお求め下さい．



印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁